



Resumão

março

Semelhança de polígonos

Resumo

Pegue uma figura e a aumente. Depois, a diminua. Temos 3 figuras com o mesmo desenho, só que de tamanhos diferentes. Dizemos, assim, que elas são semelhantes entre si.

Ex.: O logo do descomplica em tamanhos diferentes.



Agora, vamos formalizar esse conceito.

Semelhança de polígonos

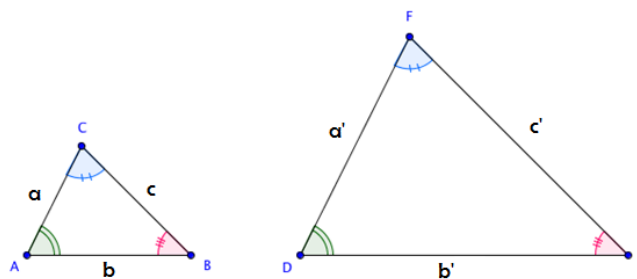
Polígonos são semelhantes quando possuem:

- Ângulos respectivamente iguais.
- Lados homólogos proporcionais.

Vamos estudar o caso mais clássico de semelhança: Triângulos.

Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes se possuírem os ângulos iguais. Na verdade, se garantirmos que 2 ângulos são iguais, já podemos dizer que são semelhantes, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é constante igual a 180 graus.



Temos que: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$

Dizemos que a e a' , b e b' , c e c' são pares de lados homólogos e k é a razão de semelhança.

A razão de semelhança é válida para todas as medidas lineares (alturas, medianas e perímetro, por exemplo).

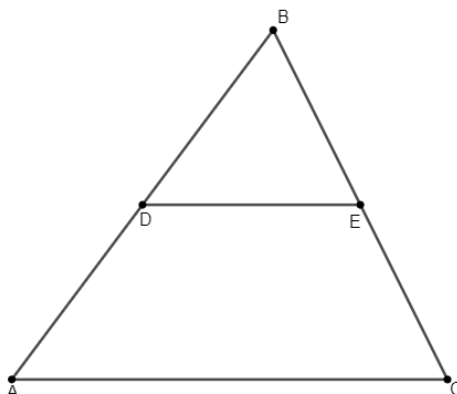
E se quisermos calcular a razão entre as áreas de polígonos semelhantes? A razão entre as áreas será k^2 .

Além disso, temos alguns casos em que a semelhança entre triângulos também ocorre:

- **Caso LAL:** dois triângulos que possuem dois lados pares de lados correspondentes proporcionais e o ângulo formado, por eles, é congruente, então eles são semelhantes.
- **Caso LLL:** dois triângulos que possuem todos os lados correspondentes proporcionais são semelhantes.

Consequência da semelhança de triângulos:

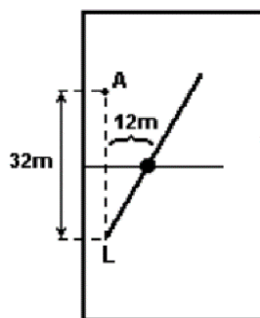
Seja ABC um triângulo onde D é ponto médio do lado AB e E é ponto médio do lado AC como mostra a figura abaixo:



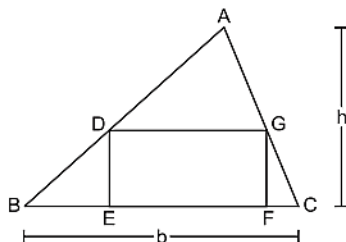
Temos que $\overline{DE}$ é o segmento que liga os pontos médios. Podemos notar que os triângulos ABC e BDE são semelhantes já que $BD = \frac{AB}{2}$ e $BE = \frac{AC}{2}$ e $\widehat{ABC}$ é ângulo comum a ambos triângulos. E, nesse caso, a razão de semelhança entre os lados ABC e BDE é de 2 para 1, em particular, $DE = \frac{AC}{2}$. Essa consequência é conhecida como base média de um triângulo.

Exercícios

1. Um lateral L faz um lançamento para um atacante A, situado 32m à sua frente em uma linha paralela à lateral do campo de futebol. A bola, entretanto, segue uma trajetória retilínea, mas não paralela à lateral e quando passa pela linha de meio do campo está a uma distância de 12m da linha que une o lateral ao atacante. Sabendo-se que a linha de meio do campo está à mesma distância dos dois jogadores, a distância mínima que o atacante terá que percorrer para encontrar a trajetória da bola será de:

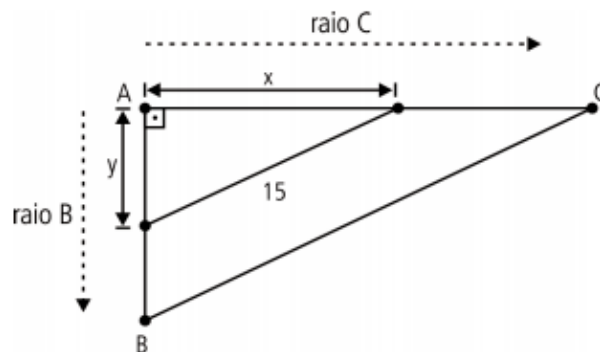


- a) 18,8m
b) 19,2m
c) 19,6m
d) 20m
e) 20,4m
2. O triângulo ABC tem altura h e base b (ver figura). Nele, está inscrito o retângulo DEFG, cuja base é o dobro da altura. Nessas condições, a altura do retângulo, em função de h e b, é dada pela fórmula:



- a) $\frac{bh}{b+h}$
b) $\frac{2bh}{b+h}$
c) $\frac{bh}{2b+h}$
d) $\frac{bh}{b+2h}$
e) $\frac{bh}{2(b+h)}$

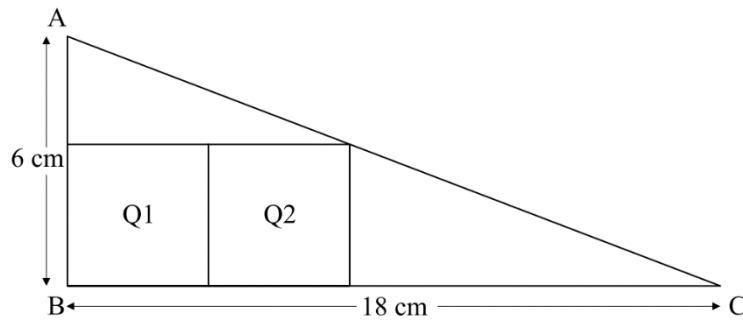
3. A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro. A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é:
- 1,16 metros
 - 3,0 metros
 - 5,4 metros
 - 5,6 metros
 - 7,04 metros
4. O triângulo ABC tem lados medindo 8 cm, 10 cm e 16 cm, enquanto o triângulo DEF, semelhante a ABC, tem perímetro 204 cm. O maior e o menor dos lados de DEF medem, respectivamente,
- 64 cm e 32 cm.
 - 60 cm e 48 cm.
 - 48 cm e 24 cm.
 - 96 cm e 48 cm.
 - 96 cm e 64 cm.
5. Suponha que dois navios tenham partido ao mesmo tempo de um mesmo porto A em direções perpendiculares e a velocidades constantes. Sabe-se que a velocidade do navio B é de 18 km/h e que, com 30 minutos de viagem, a distância que o separa do navio C é de 15 km, conforme mostra a figura:



Desse modo, pode-se afirmar que, com uma hora de viagem, a distância, em quilômetros, entre os dois navios e a velocidade desenvolvida pelo navio C, em quilômetros por hora, serão, respectivamente:

- 30 e 25.
- 25 e 22.
- 30 e 24.
- 25 e 20.
- 25 e 24.

6. Os quadrados Q_1 e Q_2 , representados na figura, são congruentes.



Determine o perímetro do quadrado Q_1 , em cm.

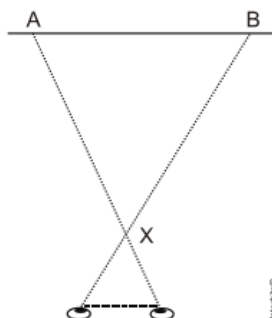
- a) 12 cm
 - b) 12,4 cm
 - c) 13,2 cm
 - d) 14 cm
 - e) 14,4 cm
7. Quando olhamos para um ambiente qualquer, a percepção de profundidade é possível devido a nossa visão binocular. Por estarem separados em média 65 mm em adultos, cada um dos nossos olhos registra uma imagem de um ângulo ligeiramente diferente. Ao interpretar essas imagens ao mesmo tempo, o cérebro forma um "mapa" dessas diferenças, tornando possível estimar a distância dos objetos em relação a nós.

A estereoscopia (popularmente conhecida como "imagem 3D") é uma técnica que consiste em exibir imagens distintas para cada olho do observador, representando o que se observaria em uma situação real. Assim, o cérebro pode ser "enganado" a interpretar os objetos representados como se estivessem flutuando diante da tela ou atrás dela.

Diversas tecnologias existem atualmente para conseguir isso. A mais comum delas, usada nas salas de cinema 3D, funciona com o uso de óculos polarizadores que filtram a imagem projetada na tela, permitindo que cada olho receba somente a imagem correspondente.

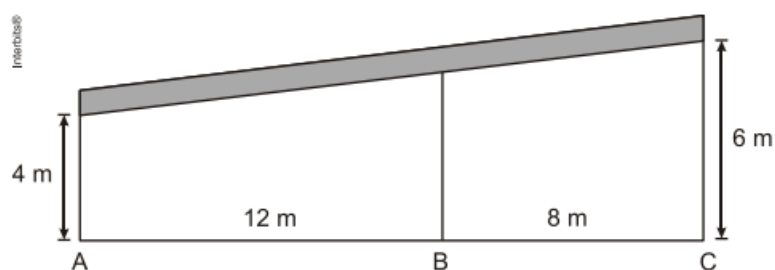
Um observador está em uma sala de cinema 3D usando óculos polarizadores e sobre a tela são projetados dois pontos A e B a uma distância de 30 cm um do outro, com A à esquerda de B. Os filtros polarizadores dos óculos fazem com que o ponto A seja visto apenas por seu olho direito e o ponto B apenas por seu olho esquerdo, de forma que as linhas de visão de cada um dos olhos se interseccionem em um ponto X, conforme a figura. O observador verá apenas um único ponto, resultado da junção em seu cérebro dos pontos A e B, localizado em X.

Sabendo que a reta imaginária que passa por seus olhos é paralela àquela que passa pelos pontos A e B e estas distam 20 m entre si, e que sua distância interocular é de 60 mm, a distância da tela em que ele verá a imagem virtual, formada no ponto X, é aproximadamente:



- a) 6,6 m
- b) 3,3 m
- c) 4 m
- d) 16,7 m
- e) 16 m

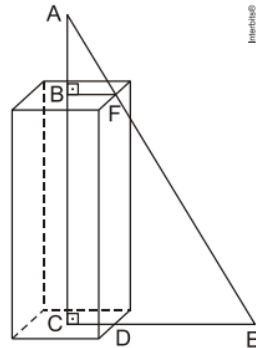
8. Um telhado inclinado reto foi construído sobre três suportes verticais de aço, colocados nos pontos A, B e C, como mostra a figura ao lado. Os suportes nas extremidades A e C medem, respectivamente, 4 metros e 6 metros de altura.



A altura do suporte em B é, então, de:

- a) 4,2 metros.
- b) 4,5 metros.
- c) 5 metros.
- d) 5,2 metros.
- e) 5,5 metros.

9. Marcelo mora em um edifício que tem a forma de um bloco retangular e, no topo desse edifício, está instalada uma antena de 20 metros. Após uma aula de Matemática, cujo tema era Semelhança de Triângulos, Marcelo resolveu aplicar o que aprendeu para calcular a altura do prédio onde mora. Para isso, tomou algumas medidas e construiu o seguinte esquema:

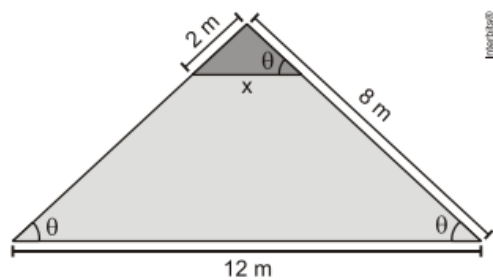


- O segmento $\overline{AC}$ é perpendicular aos segmentos $\overline{BF}$ e $\overline{CE}$;
- o segmento $\overline{AB}$ representa a antena;
- o segmento $\overline{BC}$ representa a altura do prédio;
- ponto D pertence ao segmento $\overline{CE}$;
- o ponto F pertence ao segmento $\overline{AE}$;
- o ponto B pertence ao segmento $\overline{AC}$;
- os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{FD}$ são congruentes;
- a medida do segmento $\overline{BF}$ é 12 m;
- a medida do segmento $\overline{DE}$ é 36 m.

Assim, Marcelo determinou que a altura do prédio é, em metros,

- 45.
- 50.
- 60.
- 65.
- 70.

10. Considere a imagem abaixo, que representa o fundo de uma piscina em forma de triângulo com a parte mais profunda destacada.



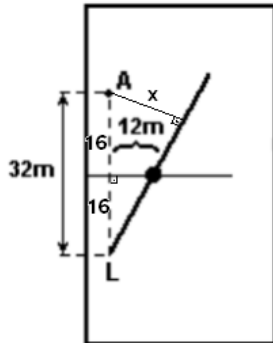
O valor em metros da medida x é

- a) 2
- b) 2,5
- c) 3
- d) 4
- e) 6

Gabarito

1. B

Observe a figura:



O triângulo grande e o pequeno são semelhantes, mas, antes de calcular o valor de x por semelhança, precisamos calcular a hipotenusa do triângulo menor. Por Pitágoras:

$$h^2 = 16^2 + 12^2$$

$$h = 20.$$

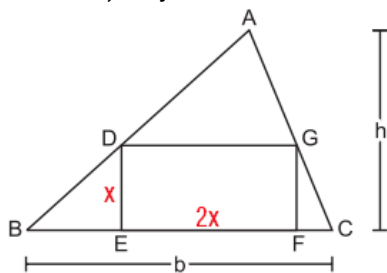
Agora sim, podemos fazer semelhança:

$$\frac{20}{32} = \frac{12}{x}$$

Resolvendo a equação, encontramos $x = 19,2$.

2. D

Primeiramente, vamos colocar as informações que o exercício nos deu no triângulo. A base é o dobro da altura, então vamos chamar de x a altura do retângulo e $2x$ sua base (já que é o dobro, como mostra o exercício). Veja como fica.



Repare agora que o triângulo ABC é semelhante do triângulo ADG, ou seja o segmento de um deles sobre o segmento correspondente no outro é uma constante. Assim podemos montar uma relação entre a altura do triângulo ABC e do ADG e também de suas bases.

Veja: Altura do triângulo ABC = h

Altura do triângulo ADG = $h - x$ (ou seja, a altura do triângulo ABC menos a altura do retângulo)

Base do triângulo ABC = b

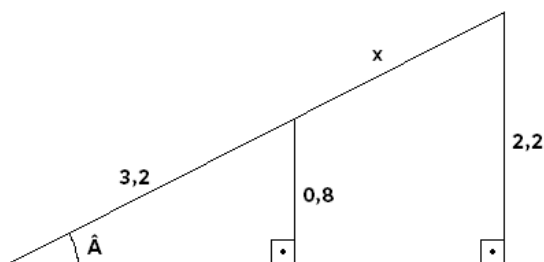
Base do triângulo ADG = $2x$

Assim, podemos montar e resolver a seguinte equivalência:

$$\begin{aligned}\frac{h-x}{h} &= \frac{2x}{b} \\ 2hx &= b(h-x) \\ 2hx &= bh - bx \\ 2hx + bx &= bh \\ x(2h+b) &= bh \\ x &= \frac{bh}{2h+b}\end{aligned}$$

3. D

Observe a figura:



O triângulo grande e o pequeno são semelhantes pois têm os mesmos ângulos. Assim, podemos calcular por semelhança o valor de x:

$$\frac{0,8}{2,2} = \frac{3,2}{3,2 + x}$$

Resolvendo a equação, encontramos $x = 5,6$.

4. D

Sendo x o maior lado e y o menor lado do triângulo DEF, pode-se escrever:

$$p_{ABC} = 8 + 10 + 16 = 34$$

$$34 \text{ — } 204$$

$$16 \text{ — } x$$

$$x = 96$$

$$34 \text{ — } 204$$

$$8 \text{ — } y$$

$$y = 48$$

5. C

Se B está a 18 km/h e já se passou 30min, então $y = 18/2 = 9$ km.

Por Pitágoras, temos que $x^2 + y^2 = 15^2$.

$$x^2 + 9^2 = 15^2$$

$$x = 12.$$

Após 1 hora, a medida do segmento “raio B” medirá 18 km.

Para descobrir a hipotenusa do triângulo maior, cujo cateto já sabemos que mede 18, usaremos semelhança de triângulos.

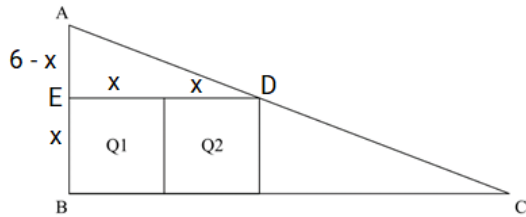
$$\frac{15}{BC} = \frac{9}{18}$$

Resolvendo a equação, encontramos $BC = 30$ km.

Como podemos ver, o triângulo maior tem o dobro das medidas do triângulo menor, assim, $AC = 24$.

6. E

Seja x o lado do quadrado. Assim, temos:



Observe que o triângulo ADE é semelhante à ABC. Assim, temos:

$$\frac{6}{18} = \frac{6-x}{2x}$$

$$12x = 108 - 18x$$

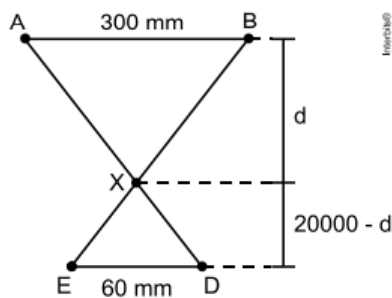
$$30x = 108$$

$$x = 3,6$$

Por fim, o perímetro do quadrado é dado por $2p = 4 \times 3,6 = 14,4$.

7. D

Considere a figura, em que d é a distância pedida.



Como os triângulos ABX e EDX são semelhantes, temos que

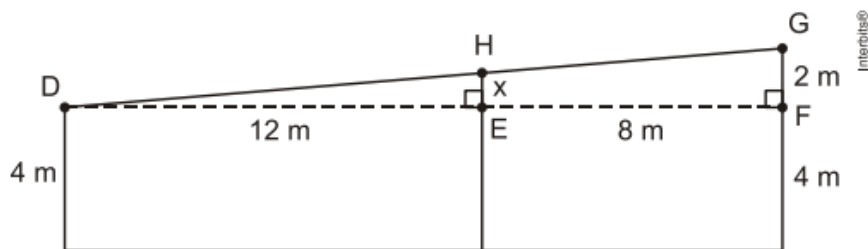
$$\frac{20000-d}{d} = \frac{60}{300} \Leftrightarrow d = 100000 - 5d$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{100000}{6}$$

$$\Rightarrow d \cong 16666,7 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow d \cong 16,7 \text{ m.}$$

8. D



Traçando $DF \parallel AC$, temos que os triângulos DHE e DGF são semelhantes por AAA.

Se $\overline{HE} = x$, vem:

$$\frac{x}{2} = \frac{12}{20} \Rightarrow x = 1,2 \text{ m.}$$

Assim, a altura do suporte em B é:

$$4 + x = 4 + 1,2 = 5,2 \text{ m.}$$

9. C

Considerando x a altura do prédio, temos:

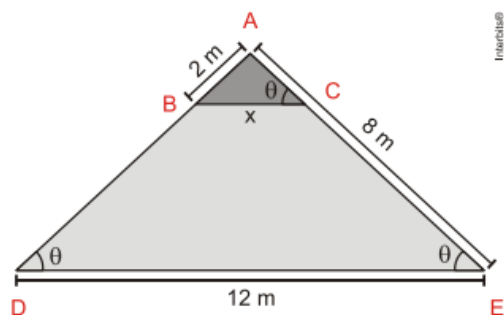
$$\triangle ABF \sim \triangle ACE$$

$$\frac{20}{20+x} = \frac{12}{12+36}$$

$$\frac{20}{20+x} = \frac{1}{4}$$

$$x = 60 \text{ m}$$

10. C



O triângulo ADE é isósceles, logo $AD = 8\text{m}$.

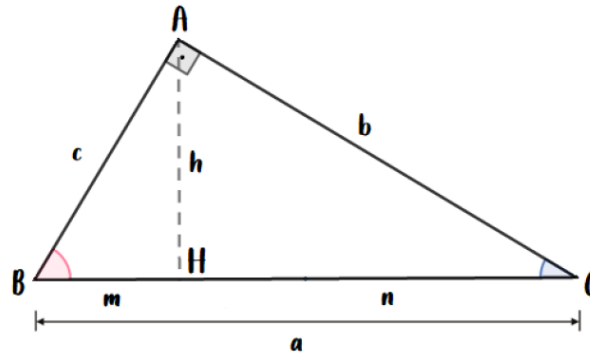
O triângulo ABC é semelhante ao triângulo ADE, portanto:

$$\frac{2}{8} = \frac{x}{12} \Rightarrow 8x = 24 \Leftrightarrow x = 3\text{m}$$

Relações métricas no triângulo retângulo

Resumo

Quando trabalhamos em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide a base do triângulo em dois segmentos, chamados de projeções dos catetos.



a – Hipotenusa

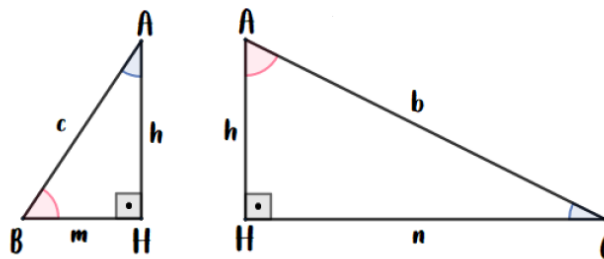
b – Cateto

c – Cateto

h – Altura

m e n – Projeções dos catetos

Podemos ver que temos triângulos semelhantes entre si. Dessas semelhanças, surgem as relações métricas do triângulo retângulo.



$$\triangle ABH \sim \triangle AHC \sim \triangle ABC$$

Projeções X Altura:

$$\triangle ABH \sim \triangle AHC \rightarrow \frac{m}{n} = \frac{h}{n} \rightarrow h^2 = m \cdot n$$

Projeções X Cateto X Hipotenusa:

$$\triangle ABC \sim \triangle AHC \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \rightarrow b^2 = a \cdot n$$

$$\triangle ABC \sim \triangle AHB \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \rightarrow c^2 = a \cdot m$$

Catetos X Hipotenusa X Altura:

$$\Delta ABC \sim \Delta AHC \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{h} \rightarrow a \cdot h = b \cdot c$$

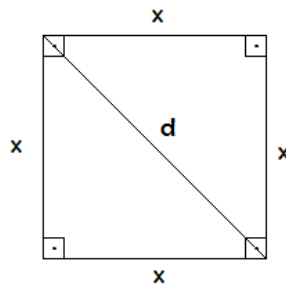
Teorema de Pitágoras

Somando as equações do item 2, temos:

$$\begin{cases} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot n \end{cases} \rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n = a(m + n) = a^2$$

Daí temos a fórmula mais famosa da geometria: $a^2 = b^2 + c^2$

Observação: É do teorema de Pitágoras que vem a fórmula da diagonal do quadrado.

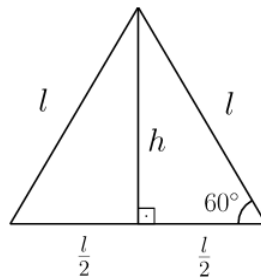


$$d^2 = x^2 + x^2$$

$$d^2 = 2x^2$$

$$d = x\sqrt{2}$$

Temos também a fórmula para a altura de um triângulo equilátero.



$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$l^2 - \frac{l^2}{4} = h^2$$

$$\frac{3l^2}{4} = h^2$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Triângulos Pitagóricos

Em matemática, nomeadamente em teoria dos números, um terno pitagórico é formado por três números naturais a , b e c tais que $a^2 = b^2 + c^2$. O nome vem do teorema de Pitágoras que afirma que, se as medidas dos lados de um triângulo rectângulo são números inteiros, então, são um terno pitagórico.

É bastante útil saber os principais triângulos pitagóricos. Separamos alguns para vocês:

- $(3, 4, 5)$
- $(6, 8, 10)$

Obs: O terno $(6, 8, 10)$ é uma variação do $(3, 4, 5)$, ou seja, se multiplicarmos todos os números do terno $(3, 4, 5)$ por 2, chegaremos no terno $(6, 8, 10)$.

→ $(5, 12, 13)$

→ $(8, 15, 17)$

→ $(7, 24, 25)$

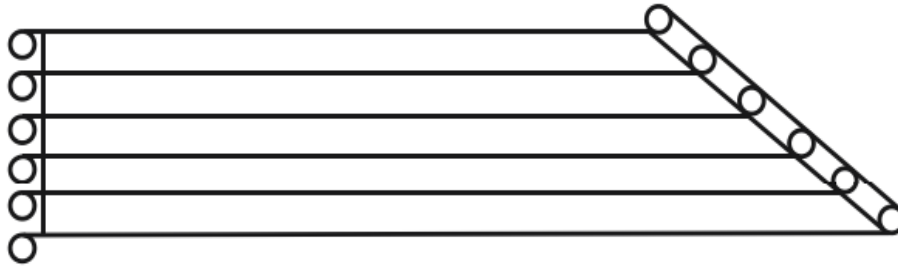
→ $(9, 40, 41)$

→ $(11, 60, 61)$

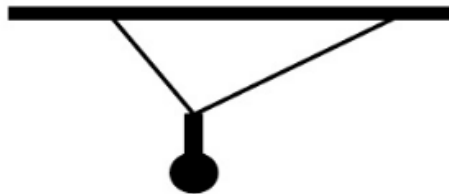
→ $(12, 35, 37)$

Exercícios

1. Um instrumento musical é formado por 6 cordas paralelas de comprimentos diferentes as quais estão fixadas em duas hastes retas, sendo que uma delas está perpendicular às cordas. O comprimento da maior corda é de 50 cm, e o da menor é de 30 cm. Sabendo que a haste não perpendicular às cordas possui 25 cm de comprimento da primeira à última corda, se todas as cordas são equidistantes, a distância entre duas cordas seguidas, em centímetros, é

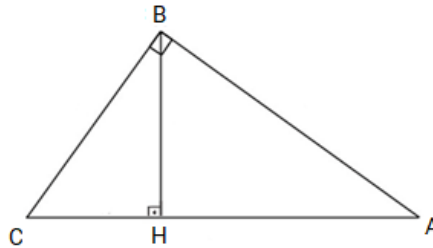


- a) 1.
b) 1,5.
c) 2.
d) 2,5.
e) 3.
2. O lampião representado na figura está suspenso por duas cordas perpendiculares, presas ao teto. Sabendo que essas cordas medem $\frac{1}{2}$ e $\frac{6}{5}$, a distância do lampião ao teto é?



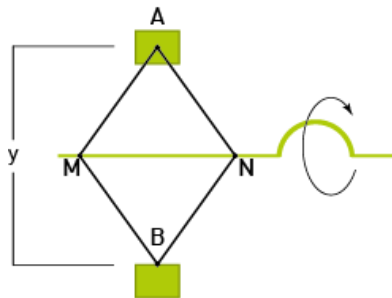
- a) 1,69
b) 1,3
c) 0,6
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{6}{13}$

3. No triângulo ABC abaixo, o ângulo do vértice B é reto e $\overline{CH} = \frac{\overline{AH}}{4} = 2 \text{ m}$.



O perímetro do triângulo ABC, em metros, é aproximadamente: (Use $\sqrt{5} \cong 2,2$)

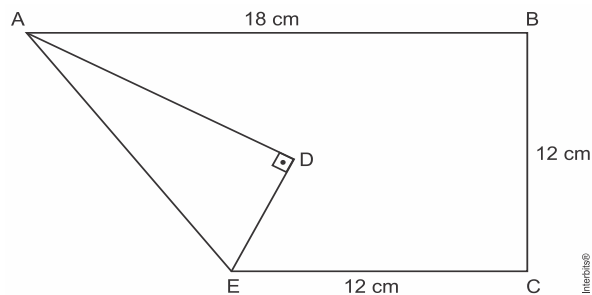
- a) 19
 - b) 21
 - c) 23
 - d) 25
 - e) 27
4. Um modelo de macaco, ferramenta utilizada para levantar carros, consiste em uma estrutura composta por dois triângulos isósceles congruentes, AMN e BMN, e por um parafuso acionado por uma manivela, de modo que o comprimento da base MN possa ser alterado pelo acionamento desse parafuso. Observe a figura:



Considere as seguintes medidas: $AM = AN = BM = BN = 4 \text{ dm}$; $MN = x \text{ dm}$; $AB = y \text{ dm}$.
O valor, em decímetros, de x em função de y corresponde a:

- a) $\sqrt{16 - 4x^2}$
- b) $\sqrt{64 - x^2}$
- c) $\frac{\sqrt{16 - 4x^2}}{2}$
- d) $\frac{\sqrt{16 - 2x^2}}{2}$

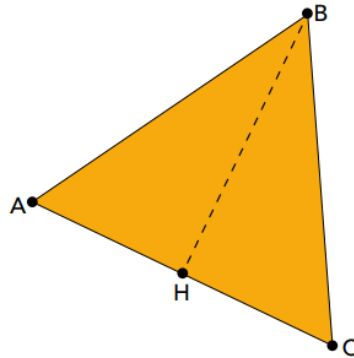
5. As projeções dos catetos de um triângulo retângulo sobre a hipotenusa medem 9dm e 16dm. Neste caso os catetos medem:
- 15dm e 20dm
 - 10dm e 12dm
 - 3dm e 4dm
 - 8dm e 63dm.
6. Uma bicicleta saiu de um ponto que estava a 8 metros a leste de um hidrante, andou 6 metros na direção norte e parou. Assim, a distância entre a bicicleta e o hidrante passou a ser:
- 8 metros
 - 10 metros
 - 12 metros
 - 14 metros
 - 16 metros
7. As extremidades de um fio de antena totalmente esticado estão presas no topo de um prédio e no topo de um poste, respectivamente, de 16m e 4m de altura. Considerando-se o terreno horizontal e sabendo-se que a distância entre o prédio e o poste é de 9m, o comprimento do fio, em metros, é
- 12
 - 15
 - 20
 - 25
8. Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do *origami* (*ori* = dobrar; *kami* = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do *origami* é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando técnica do *origami*, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é

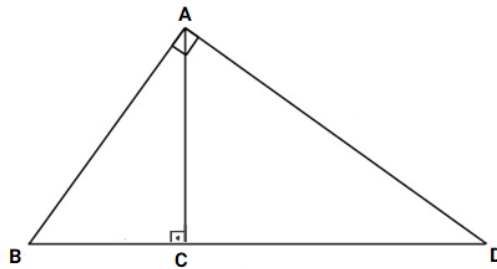
- $2\sqrt{22}$ cm.
- $6\sqrt{3}$ cm.
- 12 cm.
- $6\sqrt{5}$ cm.
- $12\sqrt{2}$ cm.

9. No triângulo equilátero ABC, H corresponde ao ponto médio do lado AC. Desse modo, a área do triângulo ABH é igual à metade da área de ABC.



Se W o perímetro do triângulo ABH e Y o perímetro do triângulo ABC, uma relação correta entre W e Y é:

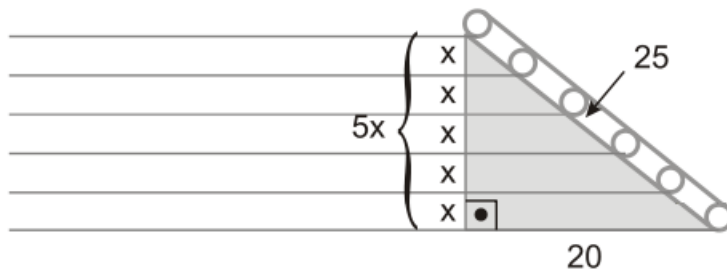
- a) $0 < W < \frac{Y}{2}$
 - b) $W = \frac{Y}{2}$
 - c) $\frac{Y}{2} < W < Y$
 - d) $W = Y$
 - e) $Y = \frac{W}{2}$
10. Na figura abaixo, $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$ são triângulos retângulos. Se o lado $\overline{BC}$ mede 3 cm e o lado $\overline{AB}$ mede 5 cm, então $\overline{CD}$ mede, em centímetros



- a) $\frac{15}{3}$
- b) $\frac{16}{3}$
- c) 4
- d) $\frac{16}{5}$
- e) 3

Gabarito

1. E



$$25^2 = 20^2 + (5x)^2$$

$$625 = 400 + 25x^2$$

$$25x^2 = 225$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3$$

2. E

$$x^2 = (1/2)^2 + (6/5)^2 = 1/4 + 36/25 = 25/100 + 144/100 = 169/100$$

$$x = 13/10$$

Agora, vamos usar uma relação métrica do triângulo retângulo que diz que o produto entre os catetos é igual ao produto da hipotenusa com a altura.

$$(1/2) * (6/5) = (13/10) * x$$

$$(13x/10) = (6/10)$$

$$13x = 6$$

$$x = 6/13.$$

3. C

Sabemos que $CH = 2$ e $AH = 8$. Para calcular o lado AB , usarei a fórmula $b^2 = am$.

$$b^2 = 10 \cdot 8 = 80.$$

$$b = \sqrt{80}.$$

Para calcular o lado BC , usarei a fórmula $c^2 = an$.

$$c^2 = 10 \cdot 2 = 20.$$

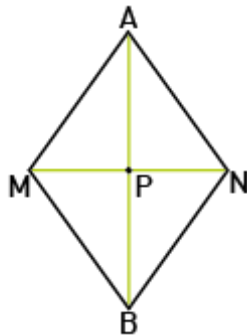
$$c = \sqrt{20}.$$

Finalmente, calculando o perímetro:

$$2p = \sqrt{20} + \sqrt{80} + 10 = 23,41 \cong 23.$$

4. B

Observe a imagem:



AMBN é um losango, pois é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais. Como as diagonais do losango são perpendiculares, ANP é um triângulo retângulo, com hipotenusa AN = 4 dm. Seus catetos são:

$$AP = \frac{AB}{2} = \frac{y}{2}$$

$$PN = \frac{MN}{2} = \frac{x}{2}$$

De acordo com o teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(AP)^2 + (PN)^2 = (AN)^2$$

$$\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{4} = 4^2$$

$$y^2 + x^2 = 64$$

$$y = \sqrt{64 - x^2}$$

5. A

Projeções:

$$n = 9 \text{ dm}$$

$$m = 16 \text{ dm}$$

Relações métricas no triângulo retângulo:

$$a = m + n$$

$$b^2 = a * m$$

$$c^2 = a * n$$

$$a * h = b * c$$

$$a^2 = c^2 + b^2$$

a = hipotenusa

m, n = projeções ortogonais dos catetos

b, c = catetos

Primeiramente, sabemos que: $a = m + n$

$$a = 9 + 16$$

$$a = 25 \text{ dm}$$

$$b^2 = a * m$$

$$b^2 = 25 * 16$$

$$b = \sqrt{25 * 16}$$

$$b = \sqrt{25} * \sqrt{16}$$

$$b = 5 * 4$$

$$b = 20 \text{ dm}$$

$$c^2 = a * n$$

$$c^2 = 25 * 9$$

$$c = \sqrt{25 * 9}$$

$$c = \sqrt{25} * \sqrt{9}$$

$$c = 5 * 3$$

$$c = 15 \text{ dm}$$

6. B

Sejam A o ponto onde se encontrava inicialmente a bicicleta e B o ponto a 6 metros ao norte de A. Chamando de C o ponto onde se encontra o hidrante, segue que a distância pedida corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo ABC, reto em A. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, vem

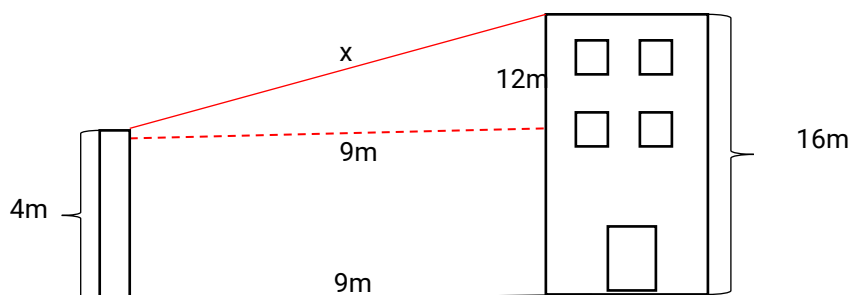
$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

$$BC^2 = 8^2 + 6^2$$

$$BC = 10 \text{ m.}$$

7. B

De acordo com os dados fornecidos, podemos imaginar um triângulo retângulo, como representado em vermelho no desenho anexo, cujos catetos medem 9 e 12 metros, e hipotenusa x, que queremos descobrir o valor.



Pra isso, basta aplicarmos Pitágoras, estabelecendo a relação entre o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos. Isto é:

$$x^2 = 9^2 + 12^2$$

$$x^2 = 81 + 144$$

$$x = \sqrt{225}$$

$$x = 15 \text{ m}$$

8. D

Desde que $\overline{AD} = \overline{BC}$ e $\overline{AB} = \overline{DC}$, temos $\overline{DE} = 6\text{cm}$. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned}\overline{AE}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 \Rightarrow \overline{AE}^2 = 12^2 + 6^2 \\ &\Rightarrow \overline{AE} = \sqrt{5 \cdot 36} \\ &\Rightarrow \overline{AE} = 6\sqrt{5}\text{cm}.\end{aligned}$$

9. C

Sendo o lado do triângulo igual a "a", pode-se escrever:

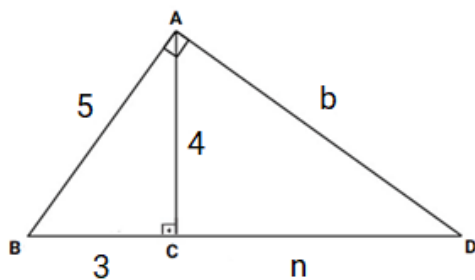
$$a^2 = \frac{a^2}{4} + \overline{BH}^2 \Rightarrow \overline{BH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$Y = a + a + a = 3a$$

$$W = a + \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = a + 0,5a + \frac{1,73}{2}a = 2,366a \left. \vphantom{W = a + \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}} \right\} \Rightarrow \frac{Y}{2} < W < Y$$

10. B

Primeiramente, vemos que o triângulo ABC é o pitagórico 3-4-5. Assim, temos:



Usando a relação $b^2 = a \cdot n$, temos:

$$b^2 = (3+n) \cdot n = n^2 + 3n$$

Agora, faremos pitágoras no triângulo ACD:

$$b^2 = 4^2 + n^2$$

$$n^2 + 3n = 16 + n^2$$

$$3n = 16$$

$$n = \frac{16}{3}$$

Circunferência: comprimento, propriedades e potência de um ponto

Resumo

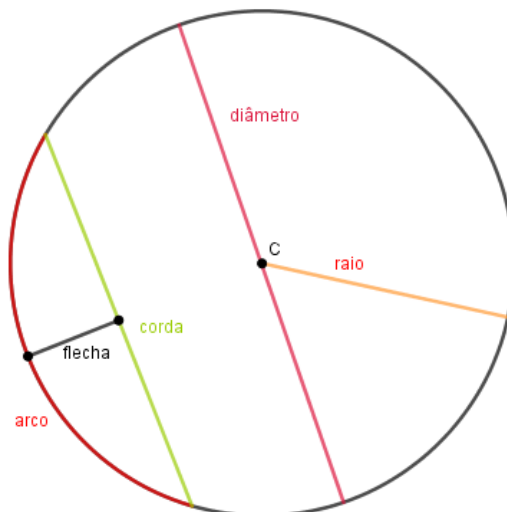
Circunferência

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos no plano que estão à mesma distância em relação a um ponto central. Esta distância é chamada de raio.

Vale lembrar que: Circunferência $\neq$ Círculo!

Círculo é toda a região do plano delimitado por uma circunferência.
Circunferência é apenas a linha que dá forma à figura.

Elementos de uma circunferência



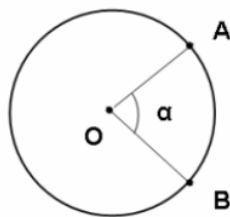
- **Centro:** Ponto equidistante dos demais pontos da circunferência.
- **Raio:** Distância entre o centro e qualquer ponto da circunferência.
- **Arco:** Parte da circunferência delimitado por dois pontos.
- **Corda:** Segmento de reta que une dois pontos da circunferência.
- **Diâmetro:** É a corda que passa pelo centro (vale duas vezes o raio).
- **Flecha:** segmento de reta que une o ponto médio da corda ao ponto médio do arco correspondente.

Comprimento da circunferência e de arcos

Dado uma circunferência com centro O e raio R, seu comprimento é dado pela seguinte fórmula:

$$C = 2\pi R$$

Para se calcular o comprimento de um arco de circunferência, basta fazer regra de 3 relacionando o comprimento angular do arco (α) e o comprimento angular de toda circunferência (360 graus ou 2π radianos).

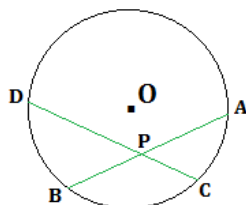


Comprimento	Ângulo
X	α
$2\pi R$	360 graus

$$x = \frac{\pi R \alpha}{180}$$

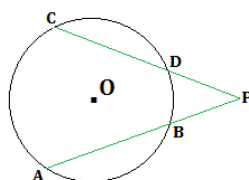
Relações métricas

Duas cordas



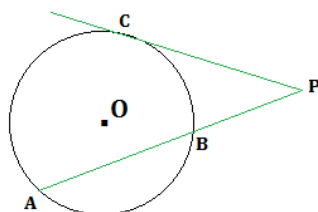
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

Duas retas secantes



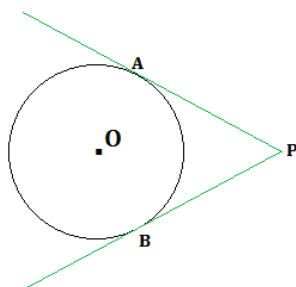
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

Uma reta tangente e uma secante



$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (\overline{PC})^2$$

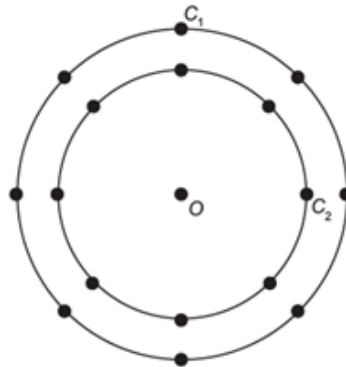
Duas retas tangentes



$$\overline{PA} = \overline{PB}$$

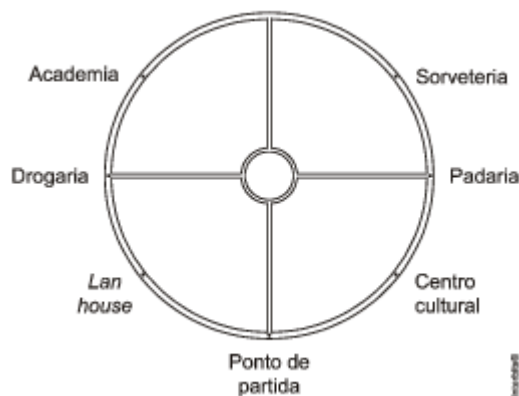
Exercícios

1. A figura é uma representação simplificada do carrossel de um parque de diversões, visto de cima. Nessa representação, os cavalos estão identificados pelos pontos escuros, e ocupam circunferências de raios 3 m e 4 m, respectivamente, ambas centradas no ponto O. Em cada sessão de funcionamento, o carrossel efetua 10 voltas.



Quanto metros uma criança sentada no cavalo C1 percorrerá a mais do que uma criança no cavalo C2, em uma sessão? Use 3,0 como aproximação para π .

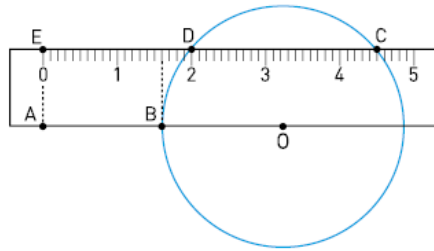
- a) 55,5
b) 60,0
c) 175,5
d) 235,5
e) 240,0
2. Camile gosta de caminhar em uma calçada em torno de uma praça circular que possui 500 metros de extensão, localizada perto de casa. A praça, bem como alguns locais ao seu redor e o ponto de onde inicia a caminhada, estão representados na figura:



Em uma tarde, Camile caminhou 4 125 metros, no sentido anti-horário, e parou. Qual dos locais indicados na figura é o mais próximo de sua parada?

- a) Centro urbano
b) Drogaria
c) Lan house
d) Ponto de partida
e) Padaria

3. A figura abaixo representa um círculo de centro O e uma régua retangular, graduada em milímetros. Os pontos A, E e O pertencem à régua e os pontos B, C e D pertencem, simultaneamente, à régua e à circunferência.

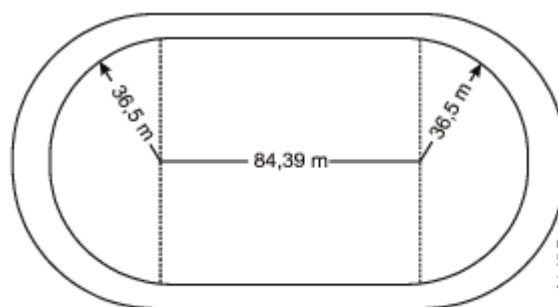


Considere os seguintes dados:

SEGMENTOS	MEDIDA (cm)
$\overline{AB}$	1,6
$\overline{ED}$	2,0
$\overline{EC}$	4,5

O diâmetro do círculo é, em centímetros, igual a:

- a) 3,1
b) 3,3
c) 3,5
d) 3,6
4. O atletismo é um dos esportes que mais se identificam com o espírito olímpico. A figura ilustra uma pista de atletismo. A pista é composta por oito raia e tem largura de 9,76 m. As raia são numeradas do centro da pista para a extremidade e são construídas do centro da pista para a extremidade e são construídas de segmentos de retas paralelas e arcos de circunferência. Os dois semicírculos da pista são iguais.

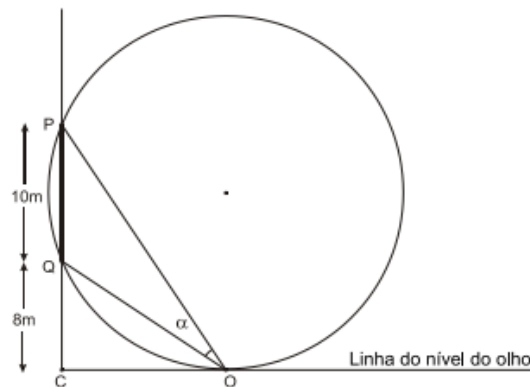


BIEMBENGUT, M. S. Modelação Matemática como método de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de 1º e 2º graus. 1990. Dissertação de Mestrado. IGCE/UNESP, Rio Claro, 1990 (adaptado).

Se os atletas partissem do mesmo ponto, dando uma volta completa, em qual das raia o corredor estaria sendo beneficiado?

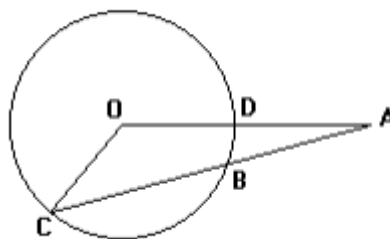
- a) 1
b) 4
c) 5
d) 7
e) 8

5. Em um centro de eventos na cidade de Madri, encontra-se um mural de Joan Miró (1893-1983) confeccionado pelo ceramista Artigas. O mural está colocado no alto da parede frontal externa do prédio e tem 60m de comprimento por 10m de altura. A borda inferior do mural está 8m acima do nível do olho de uma pessoa. A que distância da parede deve ficar essa pessoa para ter a melhor visão do mural, no sentido de que o ângulo vertical que subtende o mural, a partir de seu olho, seja o maior possível? O matemático Regiomontanus (1436-1476) propôs um problema semelhante em 1471 e o problema foi resolvido da seguinte maneira:



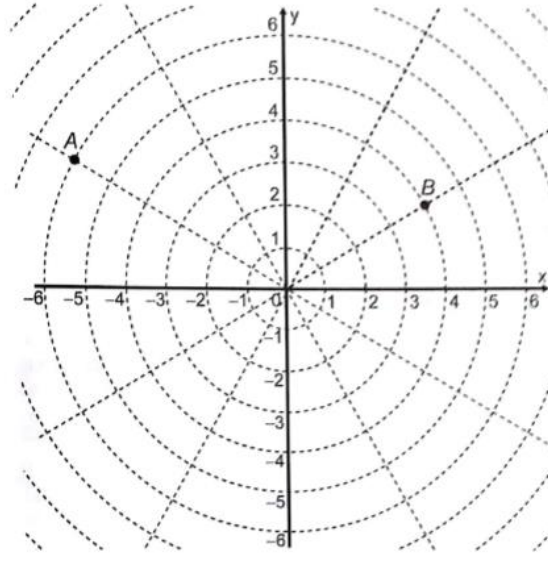
Imagine uma circunferência passando pelo olho O do observador e por dois pontos P e Q, verticalmente dispostos nas bordas superior e inferior do mural. O ângulo α será máximo quando esta circunferência for tangente à linha do nível do olho, que é perpendicular à parede onde se encontra o mural, como mostra a figura. Com estas informações, calcule a que distância OC da parede deve ficar o observador para ter a melhor visão do mural de Joan.

- a) 13
b) 24
c) 12
d) 25
e) 6
6. Na figura a seguir, $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm, $AD = 4$ cm e o ponto O é o centro da circunferência. O perímetro do triângulo AOC mede, em cm:



- a) 36
b) 45
c) 48
d) 50
e) 54

7. Sobre um sistema cartesiano considera-se uma malha formada por circunferências de raios com medidas dadas por números naturais e por 12 semirretas com extremidades na origem, separadas por ângulos de $\frac{\pi}{6}$ rad, conforme a figura.



Suponha que os objetos se desloquem apenas pelas semirretas e pelas circunferências dessa malha, não podendo passar pela origem $(0, 0)$. Considere o valor de π com aproximação de, pelo menos, uma casa decimal. Para realizar o percurso mais curto possível ao longo da malha, do ponto B até o ponto A, um objeto deve percorrer uma distância igual a

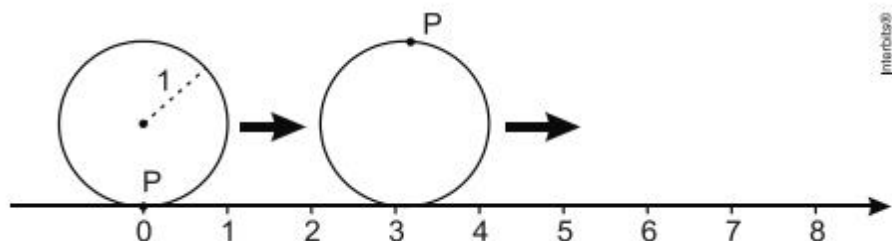
- a) $\frac{2\pi \cdot 1}{3} + 8$
- b) $\frac{2\pi \cdot 2}{3} + 6$
- c) $\frac{2\pi \cdot 3}{3} + 4$
- d) $\frac{2\pi \cdot 4}{3} + 2$
- e) $\frac{2\pi \cdot 5}{3} + 2$

8. Um garçom precisa escolher uma bandeja de base retangular para servir quatro taças de espumante que precisam ser dispostas em uma única fileira, paralela ao lado maior da bandeja, e com suas bases totalmente apoiadas na bandeja. A base e a borda superior das taças são círculos de raio 4 cm e 5 cm, respectivamente.



A bandeja a ser escolhida deverá ter uma área mínima, em centímetro quadrado, igual a

- a) 192.
 - b) 300.
 - c) 304.
 - d) 320.
 - e) 400.
9. Um disco de raio 1 gira ao longo de uma reta coordenada na direção positiva, como representado na figura abaixo.



Considerando-se que o ponto P está inicialmente na origem, a coordenada de P, após 10 voltas completas, estará entre

- a) 60 e 62.
- b) 62 e 64.
- c) 64 e 66.
- d) 66 e 68.
- e) 68 e 70.

10. A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

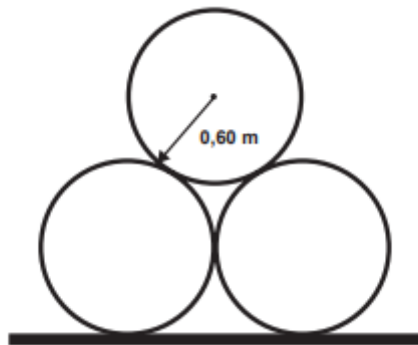
Caminhão entala em viaduto no Centro

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.



Disponível em: www.caminhoes-e-carretas.com. Acesso em: 21 maio 2012 (adaptado).

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.



A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto.

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

- a) 2,82.
- b) 3,52.
- c) 3,70.
- d) 4,02.
- e) 4,20.

Gabarito

1. B

A posição dos cavalos não importa, pois ambos completarão as 10 voltas, iniciando e terminando o percurso no mesmo ponto. Assim, sobre a distância percorrida por cada cavalo do carrossel, pode-se escrever:

$$C_1 = 10 \cdot 2\pi \cdot R_1 = 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 240$$

$$C_2 = 10 \cdot 2\pi \cdot R_2 = 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 180$$

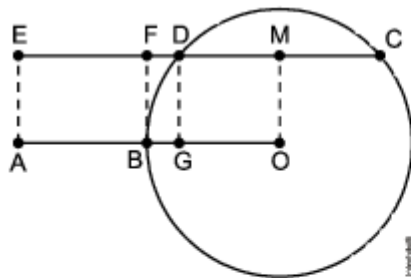
Assim a diferença das distâncias percorridas entre os dois cavalos será de 60 metros.

2. E

$4125 = 8 \cdot 500 + 125$. Portanto, dará 500 voltas completas na pista e chegará à Padaria.

3. B

Considere a figura abaixo.



Queremos calcular $2 \cdot \overline{OB}$.

Sabemos que $\overline{ED} = 2\text{cm}$ e $\overline{EC} = 4,5\text{cm}$. Logo, $\overline{DC} = \overline{EC} - \overline{ED} = 4,5 - 2 = 2,5\text{cm}$.

Sendo M o ponto médio do segmento DC, vem que $\overline{DM} = \frac{\overline{DC}}{2} = \frac{2,5}{2} = 1,25\text{cm}$.

Por outro lado, como $EF \parallel AB$, temos $\overline{FD} = \overline{ED} - \overline{EF} = \overline{ED} - \overline{AB} = 2 - 1,6 = 0,4\text{cm}$.

Portanto, $2 \cdot \overline{OB} = 2 \cdot (\overline{FD} + \overline{DM}) = 2 \cdot (0,4 + 1,25) = 3,3\text{cm}$.

4. A

Na raia 1, o atleta percorreria a menor distância, pois seu comprimento é menor. Observe que o raio da circunferência é menor

5. C

Utilizando uma relação métrica na circunferência, aquela relação entre secante e tangente, temos:

$$CO^2 = 8 \cdot 18$$

$$CO = 12$$

6. E

$$4 \cdot (4 + 2R) = 8 \cdot (8 + 10)$$

$$16 + 8R = 144$$

$$8R = 128$$

$$R = 16$$

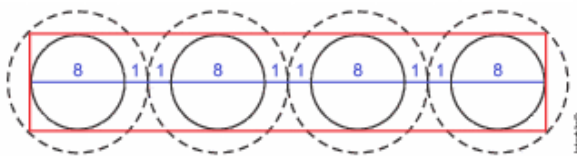
Logo o perímetro do AOC é igual a $20 + 16 + 18 = 54$ cm.

7. A

O menor caminho, por inspeção, corresponde ao comprimento de 8 segmentos de reta de medida igual a 1, somado ao comprimento do arco definido pelo ângulo central de $\frac{4\pi}{6} \cdot 1 = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$ e raio 1, ou seja, $\frac{2\pi}{3} + 8$

8. C

As taças devem ficar alinhadas, portanto seus diâmetros também ficarão. O desenho a seguir demonstra a disposição das taças, sendo os círculos menores suas bases (raio de 4 cm) e os círculos maiores pontilhados suas bordas superiores (raio de 5 cm). Em vermelho está delimitada a área mínima da bandeja.



Assim, a área mínima seria: $A = 38 \cdot 8 = 304 \text{ cm}^2$

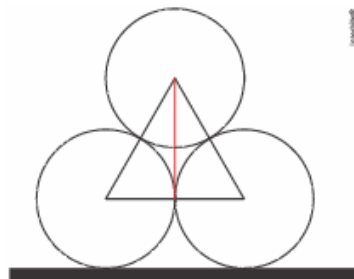
9. B

Perímetro da circunferência: $C = 2 \pi R \Rightarrow C = 2 \times (3,14) \times 1 = 6,28$.

Após 10 voltas completas, estaremos em 62,8; portanto, entre 62 e 64.

10. D

Unido-se os centros dos círculos, tem-se um triângulo equilátero (com altura h destacada em vermelho) de lado igual a $2r$, conforme a seguir:



A altura total dos canos será igual a:

$$H_{\text{canos}} = h + 2r$$

$$r = 0,6$$

$$h = L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,6 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 1,02$$

$$H_{\text{canos}} = 1,02 + 1,2 = 2,22 \text{ m}$$

$$H_{\text{viaduto}} = 1,3 + 0,5 + 2,22 = 4,02 \text{ m}$$

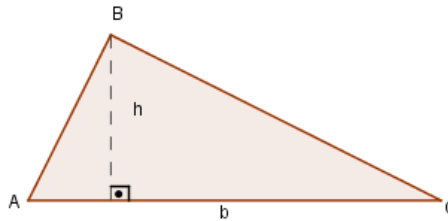
Áreas

Resumo

Toda superfície plana ocupa uma extensão no plano. As áreas medem o tamanho da superfície dessas figuras planas já conhecidas. Na aula de hoje, vamos focar nas áreas das figuras que vimos anteriormente: quadriláteros e triângulos.

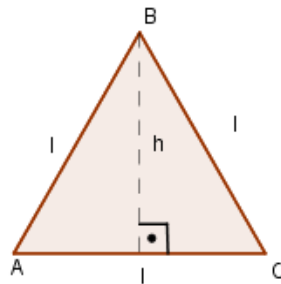
Triângulos

Considere um triângulo de base b e altura h :



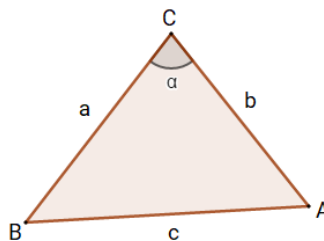
Sua área é dada por: $A = \frac{b \cdot h}{2}$

Se o triângulo for equilátero (todos os lados iguais), temos que sua altura (h) vale: $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.



Logo, a área será: $A = \frac{l \cdot h}{2} = \frac{l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

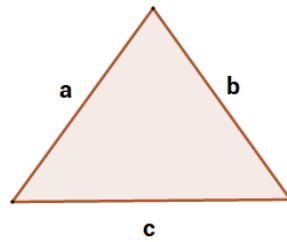
Considere o triângulo abaixo:



Sua área é dada por: $A = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen } \alpha}{2}$

Por últimos, temos uma fórmula para cálculo de área de triângulos que é bem esquecida, mas é muito útil! É a fórmula de Heron!

Seja um triângulo de lados medindo a , b e c :



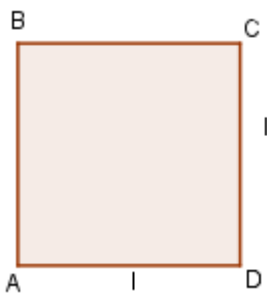
Sua área é dada pela fórmula de Heron:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Em que p é o semiperímetro do triângulo, ou seja, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

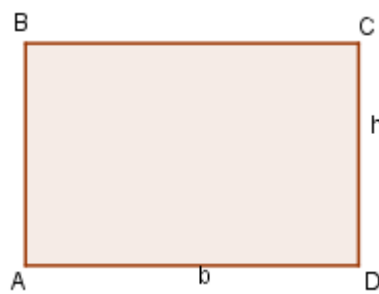
Quadriláteros

Área do quadrado



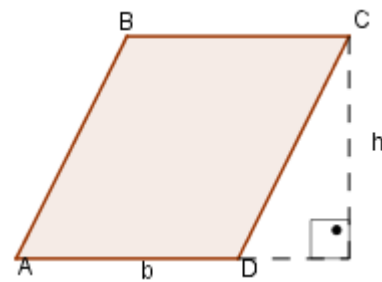
$$A = l^2$$

Área do Retângulo



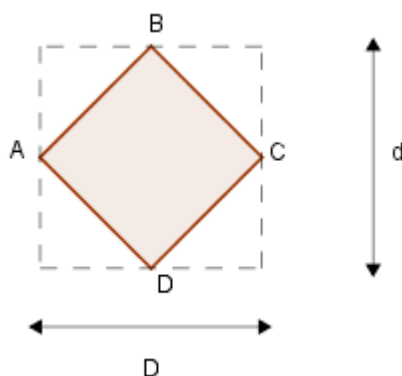
$$A = b \times h$$

Área do Paralelogramo



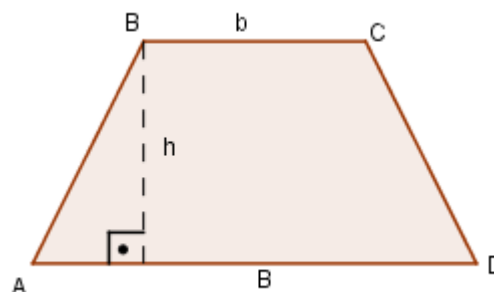
$$A = b \times h$$

Área do Losango



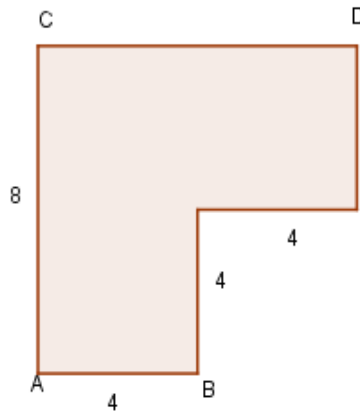
$$A = \frac{D \times d}{2}$$

Área do Trapézio

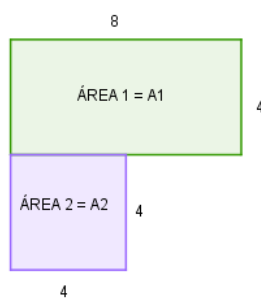
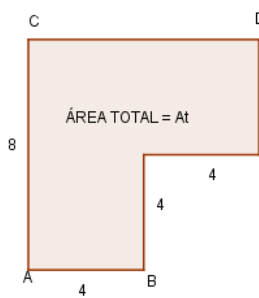


$$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

Podemos ter casos onde calcular a área apenas aplicando a fórmula não é possível como no exemplo abaixo:



Apesar disso, podemos dividir esse polígono em outros polígonos que sabemos calcular as áreas:



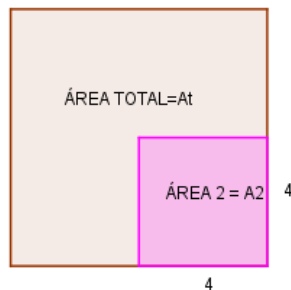
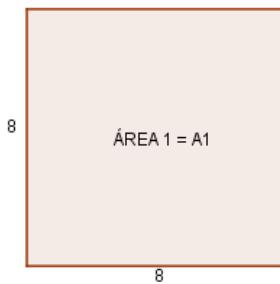
$$A_1 = 4 \times 4 = 16$$

$$A_2 = 8 \times 4 = 32$$

$$A_t = A_1 + A_2$$

$$A_t = 16 + 32 = 48$$

Um segundo modo de calcular essa área total seria:



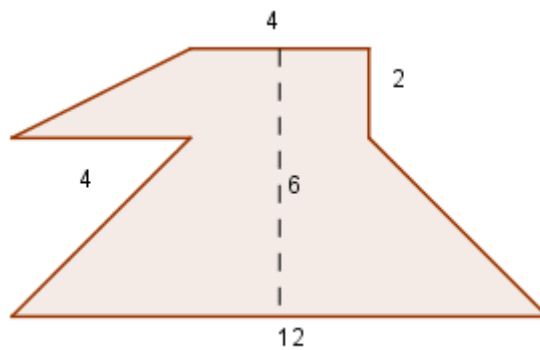
$$A_1 = 8 \times 8 = 64$$

$$A_2 = 4 \times 4 = 16$$

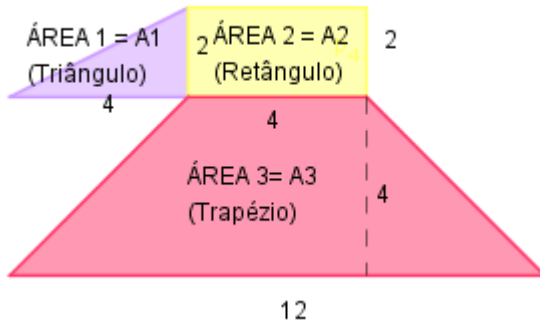
$$A_t = A_1 + A_2$$

$$A_t = 64 - 16 = 48$$

Exemplo: Calcular a área da figura abaixo:



Resolvendo, nós temos as seguintes áreas:



$$A_1 = \frac{b \times h}{2} = \frac{2 \times 4}{2} = 4$$

$$A_2 = b \times h = 4 \times 2 = 8$$

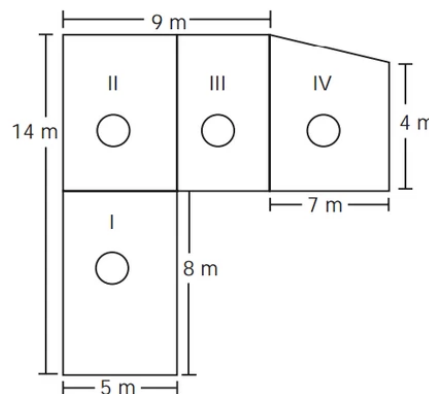
$$A_3 = \frac{(B + b) \times h}{2} = \frac{(12 + 4) \times 4}{2} = 32$$

$$A_t = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A_t = 4 + 8 + 32 = 44$$

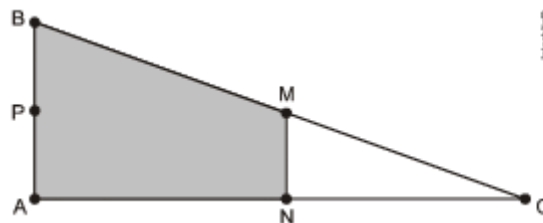
Exercícios

1. Jorge quer instalar aquecedores no seu salão de beleza para melhorar o conforto dos seus clientes no inverno. Ele estuda a compra de unidades de dois tipos de aquecedores: modelo A, que consome 600 g/h (gramas por hora) de gás propano e cobre 35 m² de área, ou modelo B, que consome 750 g/h de gás propano e cobre 45 m² de área. O fabricante indica que o aquecedor deve ser instalado em um ambiente com área menor do que a da sua cobertura. Jorge vai instalar uma unidade por ambiente e quer gastar o mínimo possível com gás. A área do salão que deve ser climatizada encontra-se na planta seguinte (ambientes representados por três retângulos e um trapézio).



Avaliando-se todas as informações, serão necessários

- quatro unidades do tipo A e nenhuma unidade do tipo B.
 - três unidades do tipo A e uma unidade do tipo B.
 - duas unidades do tipo A e duas unidades do tipo B.
 - uma unidade do tipo A e três unidades do tipo B.
 - nenhuma unidade do tipo A e quatro unidades do tipo B.
2. Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, foram indicadas por letras.

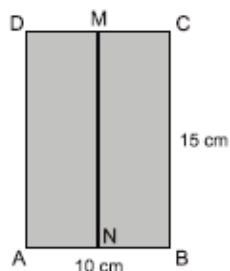


A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser calçada corresponde

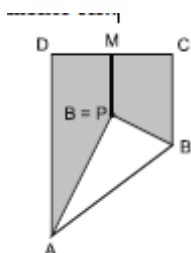
- à mesma área do triângulo AMC.
- à mesma área do triângulo BNC.
- à metade da área formada pelo triângulo ABC.
- ao dobro da área do triângulo MNC.
- ao triplo da área do triângulo MNC.

3. Para confeccionar uma bandeirinha de festa junina, utilizou-se um pedaço de papel com 10 cm de largura e 15 cm de comprimento, obedecendo-se às instruções abaixo.

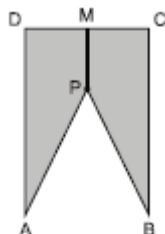
1. Dobrar o papel ao meio, para marcar o segmento MN, e abri-lo novamente:



2. Dobrar a ponta do vértice B no segmento AB', de modo que B coincida com o ponto P do segmento MN:



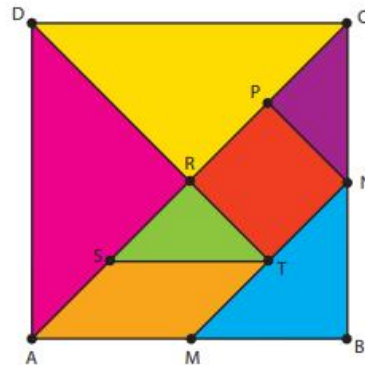
3. Desfazer a dobra e recortar o triângulo ABP.



A área construída da bandeirinha APBCD, em cm^2 , é igual a:

- a) $25(4 - \sqrt{3})$
- b) $25(6 - \sqrt{3})$
- c) $50(2 - \sqrt{3})$
- d) $50(3 - \sqrt{3})$
- e) 1 472.

4. O Tangram é um quebra-cabeça chinês que contém sete peças: um quadrado, um paralelogramo e cinco triângulos retângulos isósceles. Na figura, o quadrado ABCD é formado com as peças de um Tangram.



Observe os seguintes componentes da figura:

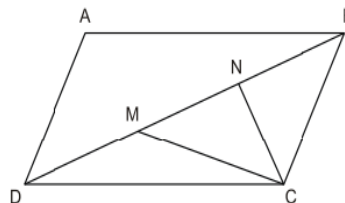
NP – lado do quadrado;

AM – lado do paralelogramo;

CDR e ADR – triângulos congruentes, bem como CNP e RST.

A razão entre a área do trapézio AMNP e a área do quadrado ABCD equivale a:

- a) $\frac{3}{32}$
- b) $\frac{5}{32}$
- c) $\frac{3}{16}$
- d) $\frac{5}{16}$
5. O Sr. Joaquim comprou um terreno em um loteamento numa praia do litoral sul de Pernambuco. O terreno tem a forma de um paralelogramo (figura abaixo) com a base medindo 20 metros e a altura medindo 15 metros. Os pontos M e N dividem a diagonal BD em três partes iguais. No triângulo CMN, ele vai cultivar flores. Qual é a área que o Sr. Joaquim destinou para esse cultivo, em m²?



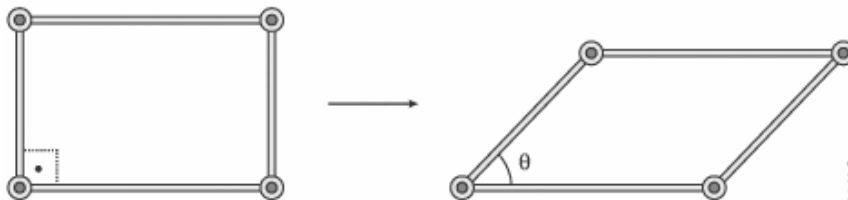
- a) 37
- b) 39
- c) 45
- d) 48
- e) 50

6. Uma praça retangular é contornada por uma calçada de 2 m de largura e possui uma parte interna retangular de dimensões de 15 m por 20 m, conforme a figura:



Nessas condições a área total da calçada é, em metros quadrados, igual a

- a) 148.
 - b) 152.
 - c) 156.
 - d) 160.
 - e) 164
7. Um objeto é formado por 4 hastes rígidas conectadas em seus extremos por articulações, cujos centros são os vértices de um paralelogramo. As hastes movimentam-se de tal forma que o paralelogramo permanece sempre no mesmo plano. A cada configuração desse objeto, associa-se θ , a medida do menor ângulo interno do paralelogramo. A área da região delimitada pelo paralelogramo quando $\theta = 90^\circ$ é A



Para que a área da região delimitada pelo paralelogramo seja $\frac{A}{2}$, o valor de θ é, necessariamente, igual a

- a) 15° .
- b) $22,5^\circ$.
- c) 30° .
- d) 45° .
- e) 60°

8. Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

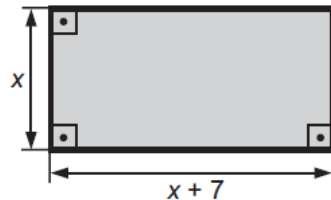


Figura A

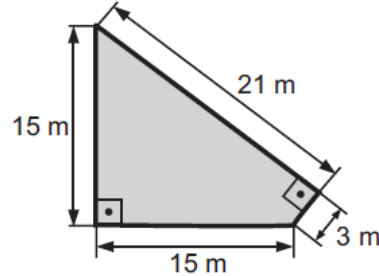
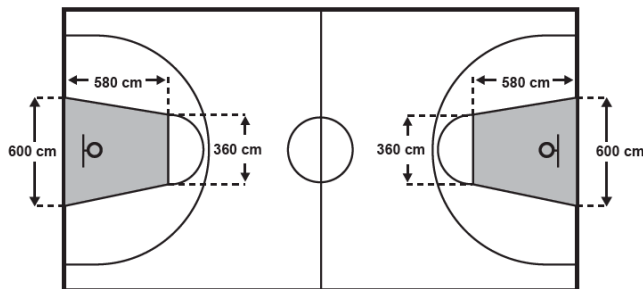


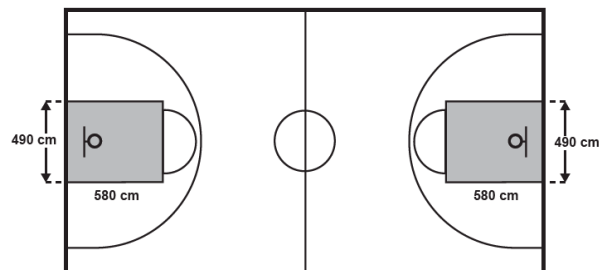
Figura B

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, da largura e do comprimento sejam iguais, respectivamente, a

- 14,5 e 7,5.
 - 16,0 e 9,0.
 - 16,3 e 9,3.
 - 17,0 e 10,0.
 - 20,5 e 13,5.
9. O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010



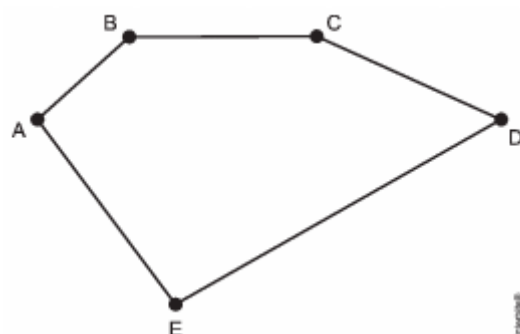
Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou a marcação das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a):

- aumento de 5 800 cm².
- aumento de 75 400 cm².
- aumento de 214 600 cm².
- diminuição de 63 800 cm².
- diminuição de 272 600 cm².

10. Uma pessoa possui um terreno em forma de um pentágono, como ilustrado na figura.



Sabe-se que a diagonal AD mede 50 m e é paralela ao lado BC, que mede 29 m. A distância do ponto B a AD é de 8 m e a distância do ponto E a AD é de 20 m. A área, em metro quadrado, deste terreno é igual a

- a) 658.
- b) 700.
- c) 816.
- d) 1 132.
- e) 1 632.

Gabarito

1. C

Calculando as áreas dos ambientes, obtemos

$$S_I = 8 \cdot 5 = 40 \text{ m}^2,$$

$$S_{II} = (14 - 8) \cdot 5 = 30 \text{ m}^2,$$

$$S_{III} = (14 - 8) \cdot (9 - 5) = 24 \text{ m}^2$$

e

$$S_{IV} = \frac{(14 - 8) + 4}{2} \cdot 7 = 35 \text{ m}^2.$$

Desse modo, como Jorge quer gastar o mínimo com gás, ele deverá instalar duas unidades do tipo A (ambiente II e III) e duas unidades do tipo B (ambiente I e IV).

2. E

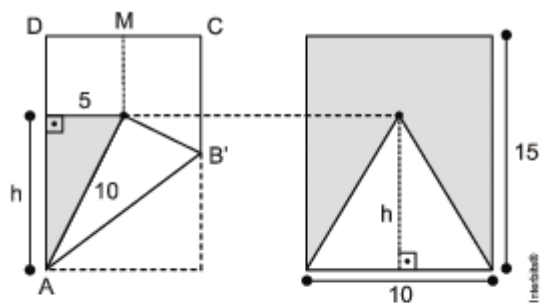
$$\frac{S_{MNC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow S_{ABC} = 4 \cdot S_{MNC}$$

$$S_{ABMN} = S_{ABC} - S_{MNC} =$$

$$S_{ABMN} = 4 \cdot S_{MNC} - S_{MNC}$$

$$S_{ABMN} = 3 \cdot S_{CMN} \text{ (TRIPLO)}$$

3. B



$$h^2 + 5^2 = 10^2$$

$$h^2 = 100 - 25$$

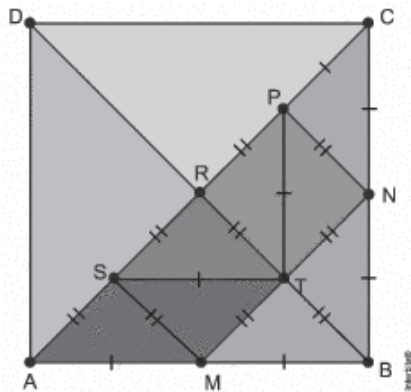
$$h^2 = 75$$

$$h = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

Portanto, a área da bandeirinha será:

$$A = 10 \cdot 15 - \frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 150 - 25\sqrt{3} = 25(6 - \sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

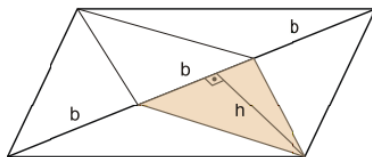
4. D



Se o trapézio AMNP é formado por 5 triângulos isósceles e o quadrado ABCD é formado por 16 triângulos isósceles então a razão entre eles será $\frac{5}{16}$.

5. E

A área destinada à plantação de flores é $\frac{1}{6}$ da área do paralelogramo, pois todos os triângulos possuem a mesma área.



$$A = \frac{1}{6} \cdot 15 \cdot 20 = 50 \text{ m}^2$$

6. C

Dimensão da praça: $15 + 2 + 2 = 19\text{m}$

$$20 + 2 + 2 = 24\text{m}$$

Portanto, sua área total será $19 \cdot 24 = 456\text{m}^2$

Área da parte interna será $15 \cdot 20 = 300\text{m}^2$

Logo, a área da calçada será $456 - 300 = 156\text{m}^2$

7. C

Sejam b e h , respectivamente, as dimensões do paralelogramo quando $\theta = 90^\circ$. Logo, temos $A = b \cdot h$. Quando θ varia no intervalo $]0^\circ, 90^\circ[$, a altura do paralelogramo é dada por $h \sin \theta$. Desse modo, para que a área seja $\frac{A}{2}$, devemos ter:

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= b \cdot h \sin \theta \Leftrightarrow \frac{b \cdot h}{2} = b \cdot h \sin \theta \\ &\Leftrightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \theta = 30^\circ. \end{aligned}$$

8. B

Sabendo que as áreas são iguais, temos

$$x \cdot (x + 7) = \frac{15 \cdot 15}{2} + \frac{21 \cdot 3}{2} \Leftrightarrow x^2 + 7x - 144 = 0$$

$$\Rightarrow x = 9 \text{ m.}$$

Portanto, o comprimento e a largura devem medir, respectivamente, 16m e 9m.

9. A

Antes da modificação, a área de cada garrafão era de

Antes da modificação, a área de cada garrafão era de

$$\frac{360 + 600}{2} \cdot 580 = 278.400 \text{ cm}^2$$

Após a modificação tal área passou a ser de

$$490 \cdot 580 = 284.200 \text{ cm}^2.$$

Portanto, houve um aumento de $284200 - 278400 = 5800 \text{ cm}^2$.

10. C

O resultado é dado por

$$(ABCD) + (ADE) = \frac{1}{2} \cdot (50 + 29) \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 20$$

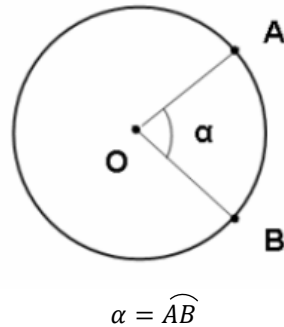
$$= 816 \text{ m}^2.$$

Ângulos na circunferência e propriedades

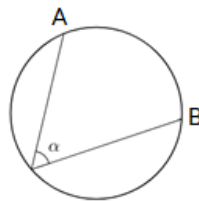
Resumo

Ângulos na circunferência

Ângulo central: seu vértice está no centro da circunferência.

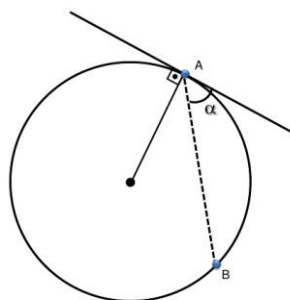


Ângulo inscrito: seu vértice é um ponto da circunferência.



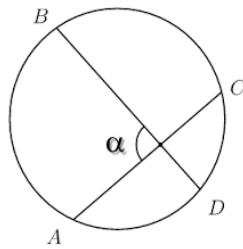
$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

Ângulo de segmento: formado por uma corda e uma tangente (com vértice no ponto de tangência).



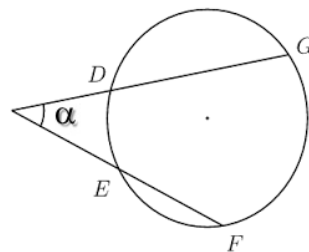
$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

Ângulo excêntrico interno: formado por duas cordas.



$$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$

Ângulo excêntrico externo: formado por duas retas secantes à circunferência.

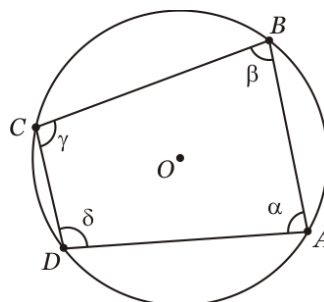


$$\alpha = \frac{\widehat{FG} - \widehat{DE}}{2}$$

Polígonos inscritíveis:

Quadrilátero

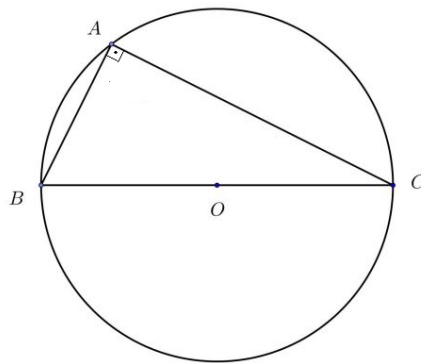
Um quadrilátero é inscritível se, e somente se, seus ângulos opostos são suplementares.



$$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$

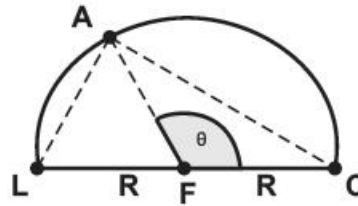
Triângulo retângulo

Se um triângulo retângulo é inscrito em meia circunferência, então sua hipotenusa coincide com o diâmetro da circunferência.



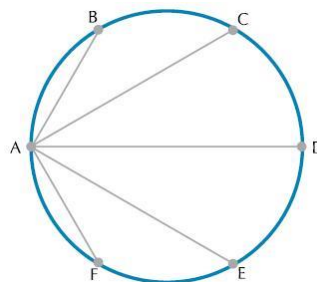
Exercícios

1. Durante seu treinamento, um atleta percorre metade de uma pista circular de raio R , conforme figura a seguir. A sua largada foi dada na posição representada pela letra L , a chegada está representada pela letra C e a letra A representa o atleta. O segmento LC é um diâmetro da circunferência e o centro da circunferência está representado pela letra F . Sabemos que, em qualquer posição que o atleta esteja na pista, os segmentos LA e AC são perpendiculares. Seja θ o ângulo que o segmento AF faz com segmento FC .



Quantos graus mede o ângulo θ quando o segmento AC medir R durante a corrida?

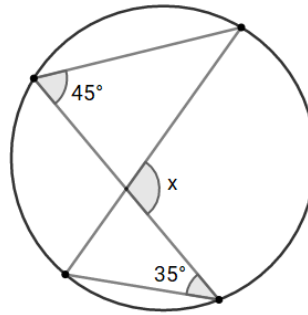
- a) 15 graus
 - b) 30 graus
 - c) 60 graus
 - d) 90 graus
 - e) 120 graus
2. Um atleta faz seu treinamento de corrida em uma pista circular que tem 400 metros de diâmetro. Nessa pista, há seis cones de marcação indicados pelas letras A, B, C, D, E e F, que dividem a circunferência em seis arcos, cada um medindo 60 graus. Observe o esquema:



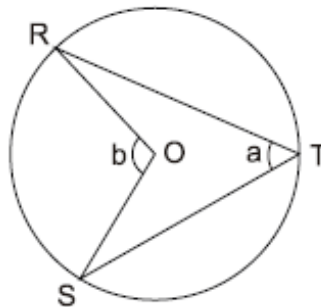
O atleta partiu do ponto correspondente ao cone A em direção a cada um dos outros cones, sempre correndo em linha reta e retornando ao cone A. Assim, seu percurso correspondeu a ABACADAEFA. Considerando $\sqrt{3} = 1,7$, o total de metros percorridos pelo atleta nesse treino foi igual a:

- a) 1480
- b) 2960
- c) 3080
- d) 3120
- e) 3240

3. O ângulo x , na figura a seguir, mede:

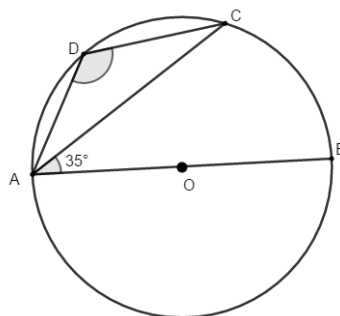


- a) 60° .
 - b) 80° .
 - c) 90° .
 - d) 100° .
 - e) 120° .
4. Na figura a seguir, R, S e T são pontos sobre a circunferência de centro O. Se x é o número real, tal que $a = 5x$ e $b = 3x + 42^\circ$ são as medidas dos ângulos $\widehat{RTS}$ e $\widehat{ROS}$, respectivamente, pode-se dizer que:

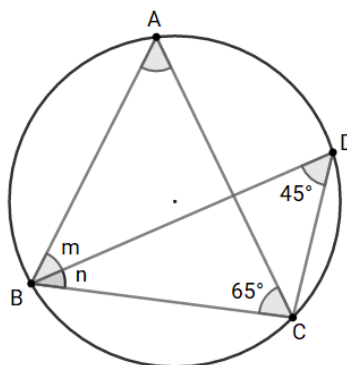


- a) $a = 30^\circ$ e $b = 60^\circ$.
- b) $a = 80^\circ$ e $b = 40^\circ$.
- c) $a = 60^\circ$ e $b = 30^\circ$.
- d) $a = 40^\circ$ e $b = 80^\circ$.
- e) $a = 30^\circ$ e $b = 80^\circ$.

5. A medida do ângulo ADC inscrito na circunferência de centro O é:

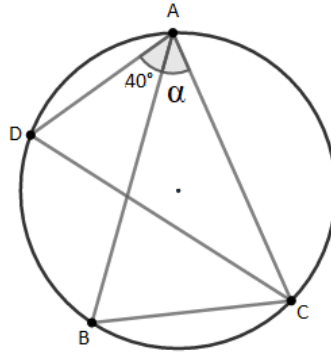


- a) 125°
 - b) 110°
 - c) 120°
 - d) 100°
 - e) 135°
6. Na figura, os triângulos ABC e BCD estão inscritos na circunferência. A soma das medidas $m + n$, em graus, é:

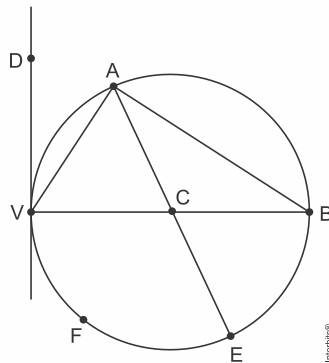


- a) 70.
- b) 90.
- c) 110.
- d) 130.
- e) 150.

7. Na figura, A, B, C e D são pontos de uma circunferência, a corda $\overline{CD}$ é bissetriz do ângulo $\hat{ACB}$ e as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ têm o mesmo comprimento. Se o ângulo $\hat{BAD}$ mede 40° , a medida α do ângulo $\hat{BAC}$ é:

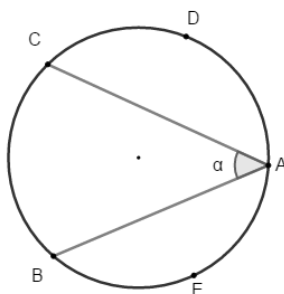


- a) 10° .
 b) 15° .
 c) 20° .
 d) 25° .
 e) 30° .
8. O triângulo ABV está inscrito em uma circunferência de centro C e o segmento $\overline{VD}$ tangencia a circunferência em V, como representado na figura a seguir. Sabendo que a $\text{med}(\hat{AVD}) = 30^\circ$ e que a medida do raio da circunferência é igual a $\sqrt{5}$ cm, o comprimento do arco VEF, em cm, é:



- a) $\frac{\pi}{3}\sqrt{5}$.
 b) $\frac{2\pi}{3}\sqrt{5}$.
 c) $\frac{\pi}{6}\sqrt{5}$.
 d) 2π .
 e) 3π .

9. A figura a seguir mostra uma circunferência em que os arcos ADC e AEB são congruentes e medem 160° cada um.



A medida em graus, do ângulo α é:

- a) 10°
 - b) 20°
 - c) 30°
 - d) 40°
10. A figura abaixo apresente uma semicircunferência de diâmetro AB, com raio igual a $\sqrt{3}$ e com o ponto C sobre a semicunferência.



Sabendo-se que o segmento AC mede 3 cm, o comprimento do arco AC é:

- a) $\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}$ cm
- b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ cm
- c) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$ cm
- d) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ cm
- e) 3π cm

Gabarito

1. C

Se $\overline{AC} = R$, temos o triângulo AFC equilátero. Logo, $\theta = 60^\circ$.

2. B

Se o raio da circunferência mede 200 m, então as medidas em metros dos segmentos AB, AD e AF são, respectivamente, iguais a 200, 400 e 200.

Os segmentos AC e AE têm a mesma medida do segmento BF, que corresponde ao dobro da altura h de um triângulo equilátero. Assim,

$$\overline{BF} = 2h = 2 \left(\frac{l\sqrt{3}}{2} \right) = 200\sqrt{3} = 200 \cdot 1,7 = 340 \text{ m}$$

onde l é a medida do lado do triângulo.

Ao final do treinamento, o atleta percorreu uma distância d, em metros, que corresponde a duas vezes a soma dos segmentos, considerando os retornos ao cone A. Logo,

$$d = 2(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE} + \overline{AF})$$

$$d = 2(200 + 340 + 400 + 340 + 200) = 2960$$

3. B

O ângulo x é composto pela soma dos ângulos externos, logo, $x = 80^\circ$.

4. A

De acordo com as propriedades do ângulo inscrito, pode-se escrever que:

$$b = 2a$$

$$3x + 42^\circ = 2 \cdot 5x$$

$$7x = 42^\circ$$

$$x = 6^\circ$$

Logo,

$$a = 5 \times 6 = 30^\circ$$

$$b = 3 \times 6 + 42^\circ = 60^\circ$$

5. A

Se $\hat{CAB} = 35^\circ$, então $\hat{COB} = 70^\circ$, pois o ângulo central vale o dobro do ângulo inscrito. O arco CBA mede $180 + 70 = 250$. Como ADC é um ângulo inscrito ele vale $\frac{250}{2} = 125^\circ$.

6. A

O ângulo central, que determina a medida do ângulo do arco AB tem ângulo com medida $2 \cdot 65^\circ = 130^\circ$ (ângulo central = 2.ângulo inscrito).

De maneira análoga, a medida do ângulo do arco BC é $2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$.

A soma dos ângulos dos arcos de uma circunferência é igual a 360° , assim:

$$AD + CD + BC + AB = 360^\circ$$

$$AD + CD = 360^\circ - 120^\circ = 140^\circ$$

Note que:

$$AD = 2m \text{ e } CD = 2n$$

Assim:

$$2m + 2n = 140^\circ$$

$$m + n = 70^\circ$$

7. C

O ângulo DÂB transcrito na circunferência é o mesmo de DCB, portanto, os dois ângulos equivalem a 40° . O ângulo DCB é o mesmo de DCA, uma vez que CD é bissetriz, portanto, os dois equivalem a 40° e ,juntos, equivalem a 80° . O ângulo ABC é o mesmo de BCA, pois o triângulo ABC é isósceles, assim, os dois equivalem a 80° e juntos equivalem a 160° .

A junção dos três ângulos do triângulo ABC deve ser 180° , se já temos 160° , para 180 faltam 20 , portanto α deverá ser 20°

8. B

Sabendo que todo triângulo inscrito na semicircunferência é retângulo, temos que o triângulo ABV possuirá ângulos: $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{V} = 60^\circ$ e $\hat{B} = 30^\circ$.

Observe que o ângulo $\hat{V} = 60^\circ$ é dado, devido a $\text{med}(\widehat{AVD}) = 30^\circ$.

Dessa maneira, temos que o ângulo $\hat{A}$ ou $\widehat{CAB}$ será igual a 30° , pois $AC = CB$ e assim temos que o ângulo $\widehat{ACB} = \widehat{ECV} = 120^\circ$.

$$C = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{5} = \frac{2\pi \cdot \sqrt{5}}{3}$$

9. B

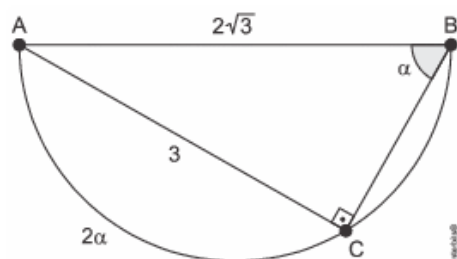
O arco de extremos C e B, determinado pelo ângulo x na circunferência mede $2x$. Portanto,

$$2x + 160^\circ + 160^\circ = 360^\circ$$

$$2x = 40^\circ$$

$$x = 20^\circ$$

10. D



$\overline{AB}$ é diâmetro $\Rightarrow \hat{ACB} = 90^\circ$

Considerando $\hat{ABC} = \alpha$, temos:

$$\text{sen} \alpha = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Portanto, a medida do arco com extremidades nos pontos A e C será $2\alpha = 120^\circ$.

Logo, o comprimento pedido será:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{3} \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}}{3}$$

Inscrição e circunscrição de polígonos

Resumo

Antes de começarmos a falar sobre inscrição e circunscrição de polígonos, precisamos aprender uma importante definição!

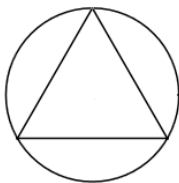
Apótema: em um polígono regular, o apótema é o segmento de reta que parte do centro e vai até um lado. Além disso, esse segmento é perpendicular a um dos lados.

Veremos a seguir algumas fórmulas que relacionam o raio (R) da circunferência inscrita e circunscrita com o lado (L) e o apótema (A) de alguns polígonos regulares.

Inscritas

Todo polígono regular pode ser inscrito (posto dentro) em uma circunferência. Observe que todos os vértices dos polígonos regulares estão em contato com a circunferência.

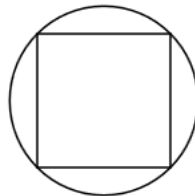
Triângulo equilátero



$$L = R\sqrt{3}$$

$$A = \frac{R}{2}$$

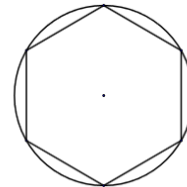
Quadrado



$$L = R\sqrt{2}$$

$$A = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Hexágono



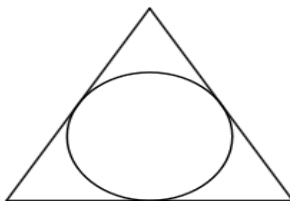
$$L = R$$

$$A = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Circunscritas

Todo polígono regular é circunscrito (fica por fora) a uma circunferência. A circunferência é tangente (toca) aos lados do polígono.

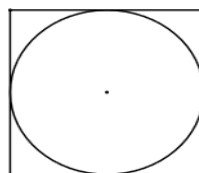
Triângulo equilátero



$$R = \frac{L\sqrt{3}}{6}$$

$$R = A$$

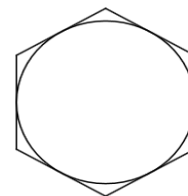
Quadrado



$$R = \frac{L}{2}$$

$$R = A$$

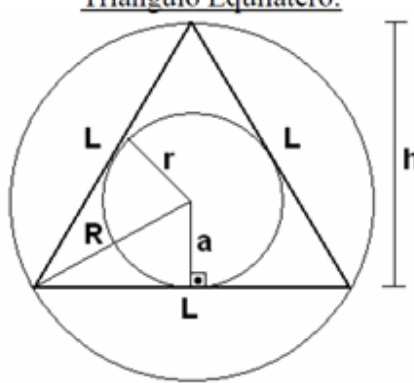
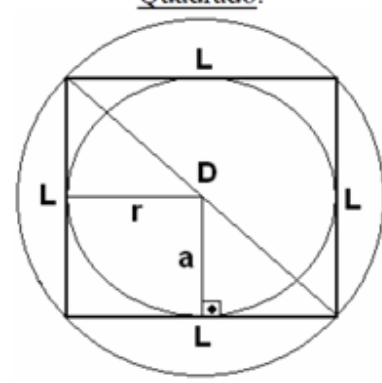
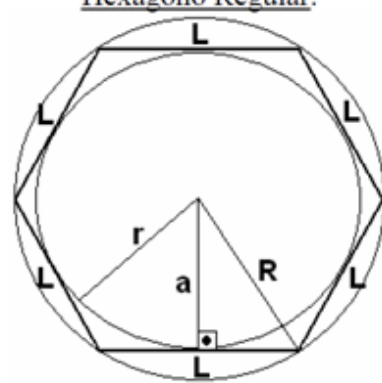
Hexágono



$$R = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

$$R = A$$

Resumo

Figura Geométrica	Fórmulas
<u>Triângulo Equilátero:</u> 	<u>Área:</u> $A = \frac{L^2 \sqrt{3}}{4}$ ou $A = \frac{3 \cdot L}{2} \cdot a$ <u>Perímetro:</u> $P = 3L$ <u>Altura:</u> $h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$ <u>Apótema:</u> $a = \frac{L\sqrt{3}}{6} = \frac{R}{2}$ <u>Raio da circunferência inscrita:</u> $r = \frac{L\sqrt{3}}{6}$ <u>Raio da circunferência circunscrita:</u> $R = \frac{L\sqrt{3}}{3}$
<u>Quadrado:</u> 	<u>Área:</u> $A = L^2$ ou $A = 2 \cdot L \cdot a$ <u>Perímetro:</u> $P = 4L$ <u>Diagonal:</u> $D = L\sqrt{2}$ <u>Apótema:</u> $a = \frac{L}{2}$ <u>Raio da circunferência inscrita:</u> $r = \frac{L}{2}$ <u>Raio da circunferência circunscrita:</u> $R = \frac{D}{2} = \frac{L\sqrt{2}}{2}$
<u>Hexágono Regular:</u> 	<u>Área:</u> $A = \frac{6L^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3L^2 \sqrt{3}}{2}$ ou $A = 3 \cdot L \cdot a$ <u>Perímetro:</u> $P = 6L$ <u>Apótema:</u> $a = \frac{L\sqrt{3}}{2}$ <u>Raio da circunferência inscrita:</u> $r = \frac{L\sqrt{3}}{2}$ <u>Raio da circunferência circunscrita:</u> $R = L$

Exercícios

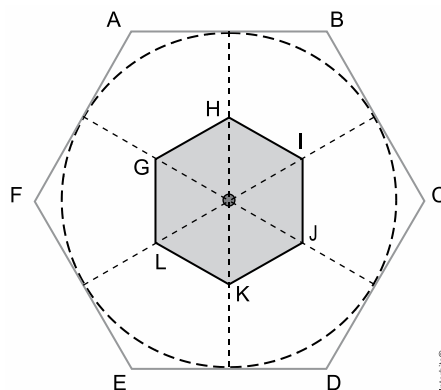
1. O tampo de vidro de uma mesa quebrou-se e deverá ser substituído por outro que tenha a forma de círculo. O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo 30 cm.

Uma loja comercializa cinco tipos de tampos de vidro circulares com cortes já padronizados, cujos raios medem 18 cm, 26 cm, 30 cm, 35 cm e 60 cm. O proprietário da mesa deseja adquirir nessa loja o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa.

Dados: 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tampo a ser escolhido será aquele cujo raio, em centímetros, é igual a

- a) 18
 - b) 26
 - c) 30
 - d) 35
 - e) 60
2. A figura indica um hexágono regular ABCDEF, de área S_1 , e um hexágono regular GHIJKL, de vértices nos pontos médios dos apótemas do hexágono ABCDEF e área S_2 .

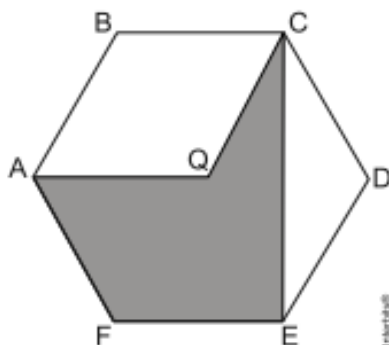


Nas condições descritas, $\frac{S_2}{S_1}$ é igual a

- a) $\frac{3}{4}$
- b) $\frac{8}{25}$
- c) $\frac{7}{25}$
- d) $\frac{1}{5}$
- e) $\frac{3}{16}$

3. Um carimbo com o símbolo de uma empresa foi encomendado a uma fábrica. Ele é formado por um triângulo equilátero que está inscrito numa circunferência e que circunscreve um hexágono regular. Sabendo-se que o lado do triângulo deve medir 3 cm, então, a soma das medidas, em cm, do lado do hexágono com o diâmetro da circunferência deve ser:
- a) 7
 - b) $2\sqrt{3}+1$
 - c) $2\sqrt{3}$
 - d) $\sqrt{3}+1$
 - e) $\frac{77}{32}$
4. Numa circunferência inscreve-se um triângulo equilátero cujo lado mede $8\sqrt{3}$. Em seguida, no interior do triângulo constrói-se outro triângulo, também equilátero, cujos lados ficam afastados 0,5 cm dos lados do primeiro. O apótema do triângulo menor, em cm, mede:
- a) 3,5
 - b) $2\sqrt{3}$
 - c) $3\sqrt{2}$
 - d) $5\sqrt{3}$
 - e) $\sqrt{2}$
5. A razão entre as áreas de um triângulo equilátero inscrito em um círculo e de um hexágono regular, cujo apótema mede 10 cm, circunscrito a esse mesmo círculo é:
- a) $\frac{1}{2}$
 - b) 1
 - c) $\frac{1}{3}$
 - d) $\frac{3}{8}$
 - e) n.d.a

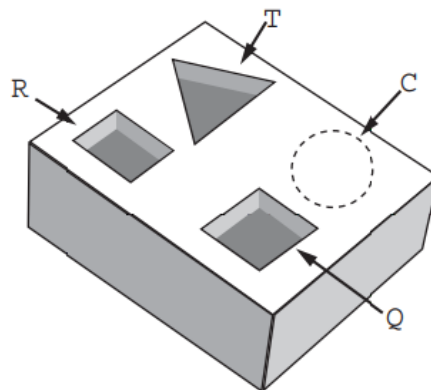
6. Na figura, ABCDEF é um hexágono regular de lado 1 dm, e Q é o centro da circunferência inscrita a ele.



O perímetro do polígono AQCEF, em dm, é igual a:

- a) $4 + 2$
 - b) $4 + \sqrt{3}$
 - c) 6
 - d) $4 + 5$
 - e) $2(2 + 2)$
7. Qual a razão entre os raios dos círculos circunscrito e inscrito de um triângulo equilátero de lado a?
- a) 23
 - b) $\frac{3}{2}$
 - c) $\sqrt{2}$
 - d) 2
 - e) $\frac{1}{2}$
8. O perímetro de um hexágono regular inscrito em um círculo de $25\pi\text{cm}^2$ de área é igual a
- a) 150 cm
 - b) 75 cm
 - c) 25 cm
 - d) 15 cm
 - e) 30 cm

9. Qual o comprimento de uma circunferência inscrita em um quadrado cuja diagonal mede 20 cm?
- $7\pi\sqrt{2} \text{ cm}$
 - $9\pi\sqrt{2} \text{ cm}$
 - $10\pi\sqrt{3} \text{ cm}$
 - $10\pi\sqrt{2} \text{ cm}$
 - $5\pi\sqrt{2} \text{ cm}$
10. Um marceneiro está construindo um material didático que corresponde ao encaixe de peças de madeira com 10 cm de altura e formas geométricas variadas, num bloco de madeira em que cada peça se posicione na perfuração com seu formato correspondente, conforme ilustra a figura. O bloco de madeira já possui três perfurações prontas de bases distintas: uma quadrada (Q), de lado 4 cm, uma retangular (R), com base 3 cm e altura 4 cm, e uma em forma de um triângulo equilátero (T), de lado 6,8 cm. Falta realizar uma perfuração de base circular (C). O marceneiro não quer que as outras peças caibam na perfuração circular e nem que a peça de base circular caiba nas demais perfurações e, para isso, escolherá o diâmetro do círculo que atenda a tais condições. Procurou em suas ferramentas uma serra copo (broca com formato circular) para perfurar a base em madeira, encontrando cinco exemplares, com diferentes medidas de diâmetros, como segue: (I) 3,8 cm; (II) 4,7 cm; (III) 5,6 cm; (IV) 7,2 cm e (V) 9,4 cm.



Considere 1,4 e 1,7 como aproximações para $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, respectivamente.

Para que seja atingido o seu objetivo, qual dos exemplares de serra copo o marceneiro deverá escolher?

- I
- II
- III
- IV
- V

Gabarito

1. A

O raio r do círculo circunscrito a um triângulo equilátero de lado 30 cm é dado por:

$$r = \frac{30}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{30}{\sqrt{3}} \cong 17,6 \text{ cm.}$$

Portanto, dentre os tampos disponíveis, o proprietário deverá escolher o de raio a 18 cm.

2. E

Calculando:

$$\text{apótema} \Rightarrow a_1 = \frac{\ell_1 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$\ell_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell_1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\ell_1 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{\frac{\ell_1 \cdot \sqrt{3}}{4}}{\ell_1} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)^2 = \frac{3}{16}$$

3. B

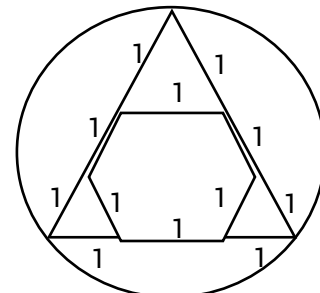
Triângulo equilátero inscrito na circunferência $\ell_3 = r\sqrt{3}$

Para $\ell_3 = 3$ temos:

$$\ell_3 = r\sqrt{3} \Rightarrow 3 = r\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow r = \sqrt{3}$$

O diâmetro vale: $d = 2r \Rightarrow d = 2\sqrt{3}$

Como o lado do hexágono mede 1 cm; $2\sqrt{3} + 1$



4. A

É importante reparar que o apótema do triângulo menor mede 0,5 cm a menos do que o do triângulo maior. Então, calculando o apótema do triângulo maior:

$$a_p = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

$$a_p = \frac{8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{6} \Rightarrow a_p = 4$$

Sabendo que:

$$a'_p = a_p - 0,5$$

Logo:

$$a'_p = 4 - 0,5 \Rightarrow a'_p = 3,5 \text{ cm}$$

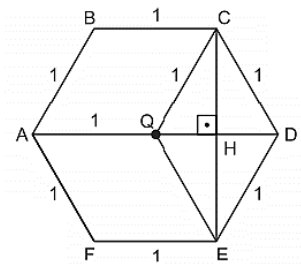
5. D

Seja R o raio da circunferência, então:

$$\frac{\text{Área do triângulo}}{\text{Área do hexágono}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4} R^2}{2\sqrt{3} R^2} = \frac{3}{8}$$

6. B

Observe a figura:



Como o hexágono é regular, CQD e EQD são triângulos equiláteros de lado 1 dm e, portanto,

$$CE = 2 \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Assim, o perímetro do polígono AQCEF é $4 \cdot 1 + \sqrt{3} = (4 + \sqrt{3})$

7. D

Raio da circunferência circunscrita a um triângulo equilátero: $R = \frac{L\sqrt{3}}{3}$

Raio da circunferência inscrita a um triângulo equilátero: $R' = \frac{L\sqrt{3}}{6}$

Portanto, $\frac{R}{R'} = 2$.

8. E

$$\text{Área do círculo} = \pi R^2 \rightarrow \pi R^2 = 25\pi \rightarrow R^2 = 25 \rightarrow R = 5 \text{ cm}$$

Como $l = R$, $l = 5 \text{ cm}$

$$2p = 5 \times 6 = 30 \text{ cm}$$

9. D

$$10\pi\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$d = l\sqrt{2} \rightarrow l\sqrt{2} = 20 \rightarrow l = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$R = \frac{l}{2} = 5\sqrt{2}$$

$$C = 2\pi R = 2\pi \cdot 5\sqrt{2} = 10\pi\sqrt{2} \text{ cm}$$

10. B

Usando as aproximações fornecidas, concluímos que os diâmetros dos círculos inscrito e circunscrito a T medem, respectivamente, 4cm e 8cm. Em consequência, os exemplares I e V não satisfazem as condições, pois T cabe em V e I cabe em T . Por outro lado, pelo Teorema de Pitágoras concluímos facilmente que a diagonal de R mede 5cm. Em que os diâmetros dos círculos inscrito e circunscrito a R medem, respectivamente, 3cm e 5cm. Portanto, os exemplares III e IV também não satisfazem as condições restando apenas o exemplar II.